

混凝土疲劳理论研究进展

王彦鹏, 李杰

(同济大学土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 结合近50年来国内外的理论研究进展, 梳理了4种混凝土疲劳问题的分析方法, 归纳总结了各方法中具有代表性的研究成果, 讨论了各方法的优缺点, 指出了物理机制在进一步研究中的重要性。

关键词: 混凝土; 疲劳; 断裂; 损伤; 物理机制

中图分类号: TU528.0

文献标志码: A

A Review of Theoretical Study of Concrete Fatigue

WANG Yanpeng, LI Jie

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the theoretical research progress made in the past five decades, this paper sorts out four analysis methods for concrete fatigue, summaries their representative work, discusses their individual advantages and limitations, and points out the importance of physical mechanisms in further research.

Key words: concrete; fatigue; fracture; damage; physical mechanisms

近20年来, 随着高速铁路建设、机场建设、海洋天然气开采和风力发电等事业在我国的迅猛发展, 我国各地兴建了大量的混凝土基础结构设施。在这些基础结构设施中, 有相当一部分(如桥梁、机场道面、海洋平台、风机基础等)在服役期间需承受数以千万次计的循环荷载作用, 极有可能发生疲劳破坏。如何保证这些混凝土结构物的耐疲劳安全, 已成为十分突出的问题。

一般认为, 最早的有关混凝土疲劳问题的研究

可追溯到19世纪末期 Considère 和 De Joly 对混凝土砂浆试件的疲劳加载试验。其后, 随着混凝土在铁路桥梁、高速公路和机场道面等建设中的广泛应用, 许多研究者都参与了这一问题的研究。但由于当时理论和试验技术水平相对落后, 直至20世纪中叶, 几乎没有产生在现在看来非常有价值的研究成果。Nordby^[1]对1958年之前在这一领域的研究工作做了详尽的报道。自1970年起, 对混凝土疲劳问题的近代研究逐渐展开。在之后约50年时间里, 科学家们先后将线弹性断裂力学、非线性断裂力学和损伤力学等力学理论引入到混凝土疲劳失效行为的研究中。这些新的力学理论, 为混凝土疲劳问题的研究注入了新的活力。在此基础上, 混凝土疲劳研究呈现出试验与理论两个方面同时向前发展的趋势, 并逐渐形成了4种不同的混凝土疲劳分析方法, 分别是S(施加最大疲劳应力水平)-N(临界荷载循环数)曲线法、Paris公式法、黏聚裂缝模型和损伤本构模型。本文将择要介绍这4种方法, 归纳总结各方法的代表性研究成果, 讨论不同方法的优缺点。

1 S-N曲线法

Aas-Jakobsen^[2]最早提出了考虑应力循环比 $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ 影响的混凝土S-N曲线表达式, 为

$$S = \frac{\sigma_{\max}}{f_0} = 1 - \beta(1 - R) \lg N \quad (1)$$

式中: σ_{\max} 和 σ_{\min} 分别为施加疲劳应力的最大、最小值; f_0 为参考静力强度; β 为材料参数。Tepfers等^[3-4]基于试验数据对 β 的取值进行了标定, 标定结果为 $\beta = 0.0685$ 。

Aas-Jakobsen的工作对后续的研究产生了重要

收稿日期: 2020-10-20

基金项目: 国家自然科学基金(51538010)

第一作者: 王彦鹏(1993—), 男, 博士生, 主要研究方向为混凝土疲劳和随机损伤力学。

E-mail: wangyanpeng@tongji.edu.cn

通信作者: 李杰(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为随机动力学、混凝土损伤力学和工程可

靠度。E-mail: lijie@tongji.edu.cn



论文
拓展
介绍

影响。Hsu^[5]、Zhang等^[6]和Wang等^[7]在式(1)基础上,分别考虑了荷载周期、反方向最小应力水平和侧限压应力水平对混凝土疲劳强度的影响,提出了不同的修正公式。

历史上,研究者们还建立了其他类型的混凝土S-N曲线。例如,Cornelissen^[8]考虑最小疲劳应力水平的影响建立了混凝土受拉S-N曲线;Kim等^[9]考虑静力抗压强度的影响建立了混凝土受压S-N曲线;赵东拂^[10]考虑侧向压应力水平的影响建立了适用于混凝土双轴拉-压加载的S-N曲线。需要指出的是,随着考虑变量数量的增加,基于试验结果进行曲线拟合的难度也在增大,因此,绝大多数S-N曲线都仅考虑了1~2个试验因素的影响。

在本质上,S-N曲线是对混凝土疲劳寿命试验均值的拟合。为考虑混凝土疲劳寿命的离散性,McCall^[11]最早引入如下的S-N-P曲线,在概率意义上描述了混凝土抗弯疲劳寿命的试验结果:

$$P = 1 - 10^{-a S^b (\lg N)^c} \quad (2)$$

式中:P为混凝土发生疲劳失效的概率;a、b和c为经验参数。

其后,Holmen^[12]和Do等^[13]利用式(2)分别对普通和高强混凝土的受压疲劳试验结果进行了拟合。

2013年,Saucedo等^[14]将静力强度的概率分布作为疲劳强度的渐进概率分布,提出了可同时考虑疲劳荷载施加频率f和应力循环比R影响的混凝土S-N-P曲线,即

$$N = \left\{ \frac{\lambda \sqrt[k]{-\ln(1-P)}}{\left[\frac{\dot{\sigma}_0}{2f(1-R)\sigma_{\max}} \right]^{0.014 \exp(\gamma f)} - \sigma_{\min 0}} \right\}^{\frac{1}{[b+c \ln(1+f)(1-R)]}} \quad (3)$$

式中:λ和k为静力强度的分布参数;σ₀为获取静力强度时施加的应力速率;σ_{min0}为界限疲劳强度;b、c和γ为材料参数。

S-N曲线法概念简单、使用方便,在实际工程中发挥了重要作用。国际上多个工程结构设计规范^[15-17]选用这一方法作为混凝土结构抵抗疲劳荷载的设计依据。然而,该法的缺点在于其对试验研究具有很强的依赖性,在本质上是一类现象学意义上的经验模型。且由于S-N曲线描述的是材料属性,无法基于其直接对结构物的疲劳性能进行评估。

2 Paris公式法

20世纪60年代初,Paris等^[18-19]针对金属裂纹的疲劳扩展问题提出了如下公式:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (4)$$

式中:a为金属裂纹的长度;ΔK为裂纹尖端处应力强度因子的幅值;C和m为材料常数。

20多年后,Baluch等^[20]和Perdikaris等^[21]将Paris公式引入到混凝土裂缝疲劳扩展问题的研究中。其后,Bazant等^[22-23]试验发现式(4)中参数C的取值依赖于混凝土试件的尺寸,于是基于Bazant^[24]早先关于混凝土静力断裂尺寸效应的研究成果,将式(4)修改为

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{\Delta K}{K_c} \right)^m \quad (5)$$

式中:K_c = K_f $\left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^{1/2}$,为试件的静力断裂韧性,K_f

为无限大试件的静力断裂韧性,β = $\frac{D}{D_{0c}}$ 为试件的脆性数,D为试件的特征尺寸,D_{0c}为试件的疲劳过渡尺寸;对普通混凝土,取m = 10.6,对高强混凝土,取m = 8.6。

Le等^[25]认为式(5)中试件的静力断裂韧性K_c不应与其疲劳过渡尺寸D_{0c}间存在函数关系,因此提出了疲劳断裂能U_c的概念。在Le等的工作中,假定U_c = U_{c,∞} $\left(\frac{D}{D + D_{0c}} \right)$,其中U_{c,∞}是无限大试件的疲劳断裂能。基于纳-宏观裂缝扩展的能量耗散速率相等条件^[26],Le等最终给出了式(5)的另一种等效表达,为

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_D)^m \quad (6)$$

式中:ΔK_D = ΔK $\left(1 + D_{0c}/D \right)^{1/2}$,为尺寸调整后的应力强度因子幅值。

在式(6)的推导过程中,Le等假定了宏观裂缝尖端包含的纳观裂缝数目N_a是应力强度因子幅值ΔK的函数,即N_a = f(ΔK)。然而,Kirane等^[27]认为更合理的表达为N_a = f(ΔK/K_c),并据此对式(6)做出了进一步改进,即

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \left(\frac{D + D_{0m}}{D + D_{0c}} \right)^{m/2} \quad (7)$$

式中:D_{0m}为单调加载下试件的过渡尺寸。

此外,Slowik等^[28]提出了能同时考虑加载历史影响和尺寸效应的Paris公式;Sain等^[29]对Slowik等的工作进行了完善,并补充考虑了加载频率 f 的影响;Carpinteri等^[30]从混凝土断裂表面具有分形特征这一试验观察出发,通过定义重整化应力强度因子的概念,建立了显含尺寸参数的Paris公式表达;Ray等^[31]基于量纲分析提出了能够同时考虑抗拉强度、断裂韧性、荷载循环比和结构尺寸影响的Paris公式。

可以看到,经过30多年的努力,Paris公式已经可以反映较多试验因素(如试件尺寸和加载频率等)对混凝土疲劳裂缝扩展的影响。相比于S-N曲线,Paris公式能够给出关于裂缝疲劳扩展过程的预测。然而,由于在复杂或变幅疲劳加载工况下,应力强度因子及其幅值的获取会变得异常困难,因此,一般说来,Paris公式仅适用于简单的常幅疲劳加载工况。另一方面,Paris公式本身无法回答裂缝何以萌生的问题,因而仅可以用于有缺口试件或裂缝扩展阶段的疲劳分析。

3 黏聚裂缝模型

黏聚裂缝模型起源于20世纪60年代Dugdale和Barrenblatt对金属裂纹尖端非线性区的研究。1976年,Hillerborg等^[32]的工作对该模型的发展具有里程碑式的意义。Hillerborg等提出:混凝土可见裂缝的前方具有一条虚拟裂缝,虚拟裂缝的界面之间存在黏聚力;随着虚拟裂缝的张开,黏聚力发生退化;当黏聚力退化到零时,虚拟裂缝转化为可见裂缝。由此,黏聚裂缝模型又称虚拟裂缝模型。将黏聚裂缝模型用于混凝土疲劳断裂研究的关键,在于建立适用于混凝土疲劳加载的黏聚力退化准则,即黏聚力 σ 和裂缝往复位移张开 δ 之间的关系。Gylltoft^[33]最早基于能量分析做了这一方面的尝试(图1a),其基本思想是认为疲劳循环加载会导致黏聚裂缝静力断裂能的消耗,当静力断裂能消耗殆尽时,黏聚裂缝发生失效。其后,Hordijk^[34]基于对试验结果的观察,提出了所谓的“连续函数模型”(图1b),即用连续函数的形式给出了疲劳加载下混凝土黏聚力软化包络、卸载和再加载曲线的表达式。但需要说明的是,Gylltoft和Hordijk两人的工作仅适用于混凝土低周疲劳加载,因而未对以后的研究产生太多影响。

进入21世纪,Yang等^[35]引入损伤变量的概念,建立了疲劳荷载下 σ - δ 关系的全量表达(图1c)。在

这一工作中,所采用加载刚度的表达式为

$$k_{\text{load}} = (\sigma_d / \delta_d) \left[1 + \sum_{l=1}^L \alpha_l (\delta / \delta_d)^l \right] / \left(1 + \sum_{l=1}^L \alpha_l \right) \quad (8)$$

式中: σ_d 为损伤屈服应力; α_l 为材料参数; δ_d 为损伤变量,具体演化式为

$$\dot{\delta}_d = \begin{cases} 0 & \delta < \delta_d \\ \dot{\delta} & \delta = \delta_d \end{cases} \quad (9)$$

所采用卸载刚度的表达式为

$$k_{\text{unload}} = (\sigma^{\text{turn}} / \delta^{\text{turn}}) \left[1 + \sum_{m=1}^M \beta_m (\delta / \delta_d)^m \right] / \left[1 + \sum_{m=1}^M \beta_m (\delta^{\text{turn}} / \delta_d)^m \right] \quad (10)$$

式中: σ^{turn} 和 δ^{turn} 分别为卸载点处的黏聚力和位移张开; β_m 为材料参数。

Nguyen等^[36]则提出了以下适用于疲劳加载的 σ - δ 关系的增量表达式(图1d):

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} K^- \dot{\delta} & \dot{\delta} < 0 \\ K^+ \dot{\delta} & \dot{\delta} > 0 \end{cases} \quad (11)$$

式中: $K^- = \sigma_{\text{max}} / \delta_{\text{max}}$ 为卸载刚度, σ_{max} 和 δ_{max} 分别为卸载点处的黏聚应力和位移张开; K^+ 为加载刚度,其演化式为

$$\dot{K}^+ = \begin{cases} -K^+ \dot{\delta} / \delta_c & \dot{\delta} > 0 \\ (K^+ - K^-) \dot{\delta} / \delta_c & \dot{\delta} < 0 \end{cases} \quad (12)$$

式中: δ_c 为经验参数。利用该 σ - δ 关系表达,Eliás等^[37]对单轴受压加载下准脆性材料I型裂缝的疲劳扩展过程进行了模拟。

2009年,Xu等^[38]建立了能够考虑疲劳裂缝萌生阶段的 σ - δ 关系表达(图1e)。他们所选用的法向黏聚力软化包络曲线为

$$\sigma_n = f_t \frac{\kappa}{\delta_0} \exp \left(-\frac{\kappa}{\delta_0} - \frac{\delta_t^2}{\delta_0^2} \right) \quad (13)$$

式中: δ_0 为材料参数; $\kappa = \delta_0 + \delta_n$, δ_n 为法向位移张开; δ_t 为切向位移张开; $f_t = (1 - \omega) f_{t0}$ 为抗拉(开裂)强度, f_{t0} 为初始抗拉强度, ω 为损伤变量,具体表达式为

$$\dot{\omega} = \begin{cases} \left| \frac{\dot{\sigma}_n}{\sigma_u} \left(\frac{\sigma_n}{f_t} - \omega_0 \right) \right| H(\sigma_n - f_0) & \text{裂缝萌生} \\ \left| \frac{\dot{\delta}_n}{\delta_u} \left(\frac{\sigma_n}{f_t} - \omega_0 \right) \right| & \text{裂缝扩展} \end{cases} \quad (14)$$

式中: $H(\cdot)$ 为Heaviside函数; σ_u 和 δ_u 为材料参数; f_0 为疲劳界限强度; $\omega_0 = f_0 / f_{t0}$ 为疲劳损伤阈值。在疲劳荷载作用下,法向黏聚力与位移张开之间的增量

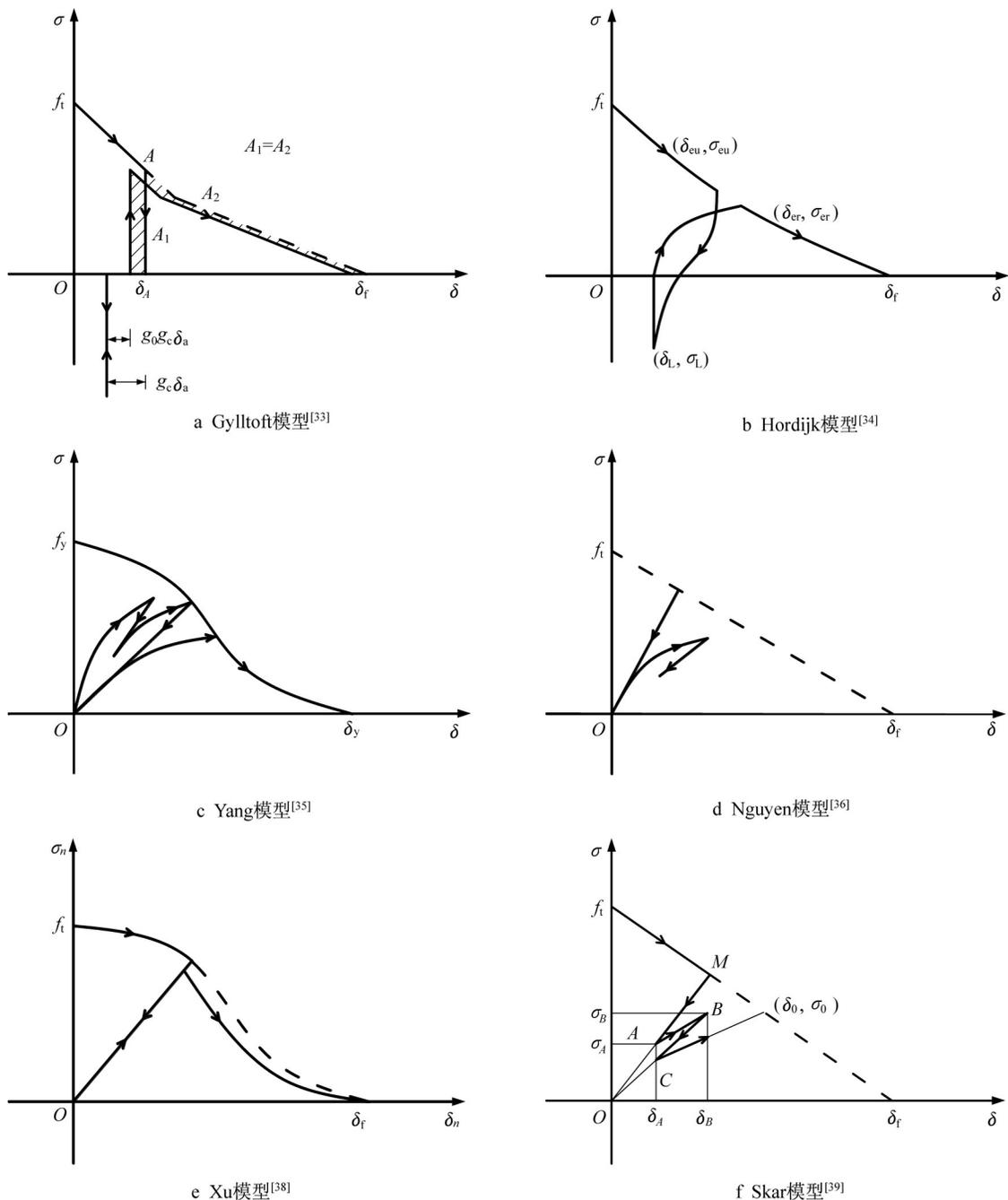


图1 黏聚裂缝模型图示

Fig. 1 Illustration of cohesive crack model

关系式为

$$\dot{\delta}_n = \frac{\sigma_{n, \max}}{\delta_{n, \max}} \dot{\delta}_n \quad (15)$$

式中: $\sigma_{n, \max}$ 和 $\delta_{n, \max}$ 分别为卸载前的最大法向黏聚力和位移张开。

最近, Skar 等^[39]基于剩余断裂能的概念提出了一种较简易的 σ - δ 关系(图 1f), 其中第 j 次循环开始时剩余断裂能的计算公式为

$$G_{f, j}^{\text{res}} = G_{f, i}^{\text{res}} - k_{\text{fat}} \sum W \quad (16)$$

式中: k_{fat} 为经验参数; $\sum W$ 为第 i 到第 j 循环间产生的累积功。对加卸载过程 $M \rightarrow A \rightarrow B$, 有 $\sum W = W_{MA} + W_{AB}$, 其中 $W_{AB} = |\delta_B - \delta_A|(\sigma_B + \sigma_A)/2$ 。

将具有上述 σ - δ 关系的黏聚裂缝单元插入体积单元, 便可以基于有限元方法进行混凝土结构疲劳断裂过程的数值模拟。

与 Paris 公式相比, 黏聚裂缝模型对混凝土的断裂过程区进行了更加细致的刻画, 且由于摆脱了应

力强度因子概念的束缚,该模型可以较容易地纳入疲劳裂缝萌生阶段的分析。相比于下文将要介绍的损伤本构模型,黏聚裂缝模型在有限元数值实现上通常更加稳健和高效,并且不存在网格敏感性问题。然而,该模型的局限性在于真实混凝土中并不存在理想的黏聚裂缝,取而代之的是断裂过程区,而黏聚力仅是对该区域内各种复杂作用力(如骨料咬合力、界面摩擦力和裂缝间桥力等)的一种综合表述。因此,黏聚力概念实际上是缺乏清晰物理图景的,从而其退化准则的建立过程必然是经验性的。另一方面,由于在有限元数值模拟中,裂缝仅能沿着体积单元的边界进行扩展,因此,采用这一模型分析得到的裂缝扩展路径通常依赖于事先有限元网格的划分。最后,黏聚裂缝模型仅适用于材料二维裂缝扩展问题的描述,难以反映第三方向加载对断裂过程的影响。

4 损伤本构模型

自Kachanov于20世纪50年代提出损伤的概念以来,损伤力学逐渐得到越来越多研究者的关注,迄今,已发展成一个较为独立的分支学科。与Paris公式和黏聚裂缝模型关心宏观裂缝的扩展不同,损伤本构模型旨在刻画外部加载下材料细观代表体积单元(RVE)力学性能的退化过程。损伤本构模型的核心在于损伤演化准则的建立。经典损伤力学通常效仿塑性力学的做法,假定存在一损伤面,当材料状态点落在该面上并且处于加载状态时,发生损伤演化。这种做法导致的结果是等幅疲劳加载下将不会有损伤演化发生。为解决这一问题,Marigo^[40]提出了加卸载不可逆的概念,认为无论材料状态点处于损伤面的何种位置,只要处于加载状态,就发生损伤演化。这一概念对后续的研究工作产生了深远的影响。

Papa等^[41]在对混凝土弹性应变 ϵ^e 进行拉压分解($\epsilon^e = \epsilon_t^e + \epsilon_c^e$)的基础上,基于加卸载不可逆概念,得到疲劳损伤的演化表达式为

$$\dot{D}_{\alpha,h} = (\bar{f}_{\alpha,h})^n g_{\alpha,h} \langle \dot{Y}_{\alpha,h} \rangle \quad (17)$$

式中: α 为I、II或III,代表应变的主轴方向; h 为t或c,代表受拉或受压状态; $g_{\alpha,h}$ 为 $Y_{\alpha,h}$ 的函数, $Y_{\alpha,h}$ 为损伤能释放率; n 为材料疲劳参数; $\bar{f}_{\alpha,h}$ 为度规函数(实质为损伤加载函数变换后的结果),有

$$\bar{f}_{\alpha,h} = (1 - D_{\alpha,h}) \left[1 + A_h (\bar{Y}_{\alpha,h} - Y_{0,h})^{B_h} \right] \quad (18)$$

式中: $\bar{Y}_{\alpha,h} = Y_{\alpha,h}/E_0$,为归一化的损伤能释放率; A_h 、 B_h 和 $Y_{0,h}$ 为材料参数。

Allische^[42]考虑混凝土受拉损伤机制,基于加卸载不可逆概念,建立的损伤张量 D 的演化表达为

$$\dot{D} = \frac{1}{h} \left(\frac{f}{K} \right)^n \left[\frac{\partial f}{\partial Y^+}; \dot{Y}^+ \right]^+ \frac{\partial f(Y^+, D)}{\partial Y^+} \quad (19)$$

式中: h 为硬化参数; K 和 n 为黏性参数; Y^+ 为受拉损伤能释放率张量; $f(\cdot)$ 为损伤加载函数,有

$$f(Y^+, D) = \frac{|g|}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} - K(D) \quad (20)$$

式中: g 为常数; $\bar{\epsilon} = \sqrt{\sum \langle \epsilon_i \rangle^+}$ 为等效加载应变, ϵ_i 为应变张量 ϵ 的第 i 个特征值; $K(D) = C_0 - C_1 \text{tr}(D)$, C_0 和 C_1 为材料参数。

同样基于加卸载不可逆概念,Mai等^[43]提出的疲劳损伤表达式为

$$\dot{D} = \varphi(S, D) f^n \left\langle \frac{\partial S}{\partial \epsilon}; \dot{\epsilon} \right\rangle^+ \quad (21)$$

式中: $\varphi(\cdot)$ 为特定函数; S 为损伤能释放率; n 为疲劳参数; f 为度规函数,为

$$f(D, S) = \frac{(1-D)m(D)S}{W} \quad (22)$$

式中: $m(\cdot)$ 为特定函数; W 为初始损伤阈值。

事实上,研究者还提出了其他可用于确立疲劳损伤演化法则的方法。例如,Suaris等^[44]类比塑性力学中的边界面法,提出在损伤能释放率空间存在着边界面、加载面和界限断裂面3个曲面,基于正交流动法则,加载面上的损伤演化表达式为

$$\dot{\omega}_i = L \frac{\partial f}{\partial R_i} \quad (23)$$

式中: ω_i 和 R_i 分别为第 i 主拉应力方向上的损伤量和与之对应的损伤能释放率; f 为加载函数; L 为加载指标。当材料状态点处于界限断裂面内时,不产生损伤演化;当加载面膨胀至与边界面相接触时,材料点发生破坏。

Desmorat等^[45]考虑累积摩擦滑移的影响,在Lemaitre^[46]针对金属疲劳损伤研究的基础上给出了混凝土疲劳损伤的演化式

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right) \pi \quad (24)$$

式中: Y 为损伤能释放率; S 为材料参数; $\pi = \int_0^t \|\dot{\epsilon}^\pi\| d\tau$ 为累积摩擦滑移。

Ding等^[47]通过向经典微观随机断裂模型^[48]中

引入微弹簧能量耗散机制,建立了混凝土静力和疲劳损伤演化的统一表达式为

$$d = \int_0^1 [1 - H(E_s - E_f)H(E_s - Y)] dx \quad (25)$$

式中: $H(\cdot)$ 为Heaviside函数; E_s 为微弹簧保有的特征能量; E_f 为疲劳加载下微弹簧的累积能量耗散; Y 为损伤能释放率。

与黏聚裂缝模型相比,基于损伤本构模型进行混凝土结构疲劳失效的数值模拟在方法上更为统一,在流程上更加简洁,但往往伴随有网格敏感性问题。一些研究表明,使用裂缝带模型^[49]或者非局部方法^[48]可以有效降低网格敏感性带来的影响。然而,需要指出的是,在热力学框架内,人们仅能获得一些关于损伤演化的限制性条件,而无法完全通过理论推导获得损伤演化的具体形式。因此,混凝土损伤演化法则的建立,常常是一维试验结果的理性外推。本文作者认为,混凝土细观尺度的疲劳损伤演化,在物理上源于混凝土纳微观底层裂缝的疲劳扩展。因此,若能深入研究这些底层裂缝的疲劳扩展机制以及损伤的跨尺度传播机制,那么必能在混凝土疲劳损伤演化建模的研究中取得重要进展。

5 结论

迄今为止,混凝土结构的疲劳破坏分析依然是一个非常具有挑战性的课题。本文回顾了半个世纪以来世界范围内在混凝土疲劳理论研究领域取得的主要成果,梳理总结了4种主要的分析方法。在这4种方法当中, $S-N$ 曲线法最简单,但却难以应用于复杂结构的分析;Paris公式法抓住了混凝土疲劳断裂的部分特征,但应用范围仍相当有限;通过与有限元方法相结合,黏聚裂缝模型能够实现对复杂工程结构疲劳问题的处理,但在本质上仍是经验性的;损伤本构模型具有严格的热力学基础,可以基于物理规律对其内变量演化过程进行建模分析,因而最具发展潜力。本文作者认为,只有坚持对混凝土疲劳损伤演化过程中的物理机制进行探讨,才有可能最终建立起趋于完善的混凝土结构疲劳分析理论。

作者贡献说明:

王彦鹏:具体研究工作的开展和论文撰写。

李杰:论文的选题、指导及修改。

参考文献:

- [1] NORDBY G M. Fatigue of concrete - a review of research [J]. Journal of the American Concrete Institute, 1958, 55(8): 191.
- [2] AAS-JAKOBSEN K. Fatigue of concrete beams and columns [R]. Trondheim: University of Trondheim, 1970.
- [3] TEPFERS R. Tensile fatigue strength of plain concrete [J]. ACI Journal, 1979, 76(8): 919.
- [4] TEPFERS R, KUTTI T. Fatigue strength of plain, ordinary, and lightweight concrete [J]. ACI Journal, 1979, 76(5): 635.
- [5] HSU T T C. Fatigue of plain concrete [J]. ACI Journal, 1981, 78(4): 292.
- [6] ZHANG B, PHILLIPS D V, WU K. Effects of loading frequency and stress reversal on fatigue life of plain concrete [J]. Magazine of Concrete Research, 1996, 48(177): 361.
- [7] WANG H L, SONG Y P. Fatigue capacity of plain concrete under fatigue loading with constant confined stress [J]. Materials and Structures, 2011, 44: 253.
- [8] CORNELISSEN H A W. Fatigue failure of concrete in tension [J]. Heron, 1984, 29(4): 1.
- [9] KIM J K, KIM Y Y. Experimental study of the fatigue behavior of high strength concrete [J]. Cement and Concrete Research, 1996, 26(10): 1513.
- [10] 赵东拂. 混凝土多轴疲劳破坏准则研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2002.
ZHAO Dongfu. Study on failure criterion of plain concrete under multiaxial fatigue loading [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2002.
- [11] MCCALL J T. Probability of fatigue failure of plain concrete [J]. Journal of the American Concrete Institute, 1958, 55(8): 233.
- [12] HOLMEN J O. Fatigue of concrete by constant and variable amplitude loading [J]. ACI Special Publication, 1982, 75: 71.
- [13] DO M T, CHAALLAL O, AITCIN P C. Fatigue behavior of high-performance concrete [J]. Journal of Materials in Civil Engineering, 1993, 5(1): 96.
- [14] SAUCEDO L, YU R C, MEDEIROS A, *et al.* A probabilistic fatigue model based on the initial distribution to consider frequency effect in plain and fiber reinforced concrete [J]. International Journal of Fatigue, 2013, 48: 308.
- [15] CEB-FIP. Model code 2010 [S]. Lausanne: Thomas Telford Ltd, 2010.
- [16] Japan Society of Civil Engineers. Standard specification for concrete structures—2007 [S]. Tokyo: Japan Society of Civil Engineers, 2007.
- [17] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 混凝土结构设计规范: GB 50010—2010 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Code for design of concrete structures: GB 50010—2010 [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010.

- [18] PARIS P C, ERDOGAN F. A critical analysis of crack propagation laws [J]. *Journal of Basic Engineering*, 1963, 85(4): 528.
- [19] PARIS P C, GOMEZ M P, ANDERSON W E. A rational analytic theory of fatigue [J]. *The Trend in Engineering*, 1961, 13: 9.
- [20] BALUCH M H, QURESHY A B, AZAD A K. Fatigue crack propagation in plain concrete [C]//SEM/RILEM International Conference on Fracture of Concrete and Rock. Houston: Springer, 1987: 80-87.
- [21] PERDIKARIS P C, CALOMINO A M. Kinetics of crack growth in plain concrete [C]//SEM/RILEM International Conference on Fracture of Concrete and Rock. Houston: Springer, 1987: 64-69.
- [22] BAZANT Z P, XU K M. Size effect in fatigue fracture of concrete [J]. *ACI Materials Journal*, 1991, 88(4): 390.
- [23] BAZANT Z P, SCHELL W F. Fatigue fracture of high-strength concrete and size effect [J]. *ACI Materials Journal*, 1993, 90(5): 472.
- [24] BAZANT Z P. Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, 110: 518.
- [25] LE J L, MANNING J, LABUZ J F. Scaling of fatigue crack growth in rock [J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2014, 72: 71.
- [26] LE J L, BAZANT Z P. Unified nano-mechanics based probabilistic theory of quasibrittle and brittle structures: II fatigue crack growth, lifetime and scaling [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, 59: 1322.
- [27] KIRANE K, BAZANT Z P. Size effect in Paris law and fatigue lifetimes for quasibrittle materials: modified theory, experiments and micro-modeling [J]. *International Journal of Fatigue*, 2016, 83: 209.
- [28] SLOWIK V, PLIZZARI G A, SAOUMA V E. Fracture of concrete under variable amplitude fatigue loading [J]. *ACI Materials Journal*, 1996, 93(3): 272.
- [29] SAIN T, KISHEN J M C. Prediction of fatigue strength in plain and reinforced concrete beams [J]. *ACI Structural Journal*, 2007, 104(5): 621.
- [30] CARPINTERI A, SPAGNOLI A, VANTADORI S. A multifractal analysis of fatigue crack growth and its application to concrete [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, 77: 974.
- [31] RAY S, KISHEN J M C. Fatigue crack propagation model and size effect in concrete using dimensional analysis [J]. *Mechanics of Materials*, 2011, 43: 75.
- [32] HILLERBORG A, MODEER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements [J]. *Cement and Concrete Research*, 1976, 6: 773.
- [33] GYLLTOFT K. A fracture mechanics model for fatigue in concrete [J]. *Matériaux Et Construction*, 1984, 17: 55.
- [34] HORDIJK D A. Local approach to fatigue of concrete [D]. Delft: Technische Universiteit Delft, 1991.
- [35] YANG B, MALL S, RAVI-CHANGDAR K. A cohesive zone model for fatigue crack growth in quasibrittle materials [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38: 3927.
- [36] NGUYEN O, REPETTO E A, ORTIZ M, *et al.* A cohesive model of fatigue crack growth [J]. *International Journal of Fracture*, 2011, 110: 351.
- [37] ELIAS J, LE J L. Modeling of mode-I fatigue crack growth in quasibrittle structures under cyclic compression [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, 96: 26.
- [38] XU Y J, YUAN H. Computational analysis of mixed-mode fatigue crack growth in quasi-brittle materials using extended finite element methods [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009, 76: 165.
- [39] SKAR A, POULSEN P N, OLESEN J F. A simple model for fatigue crack growth in concrete applied to a hinge beam model [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, 181: 38.
- [40] MARIGO J J. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1985, 21(4): 861.
- [41] PAPA E, TALIERCIO A. Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behavior of plain concrete [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996, 55(2): 163.
- [42] ALLICHE A. Damage model for fatigue loading of concrete [J]. *International Journal of Fatigue*, 2004, 26: 915.
- [43] MAI S H, LE-CORRE F, FORET G, *et al.* A continuum damage modeling of quasi-static fatigue strength of plain concrete [J]. *International Journal of Fatigue*, 2012, 37: 79.
- [44] SUARIS W, OUYANG C S, FERNANDO V M. Damage model for cyclic loading of concrete [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1990, 116(5): 1020.
- [45] DESMORAT R, RAGUENEAU F, PHAM H. Continuum damage mechanics for hysteresis and fatigue of quasi-brittle materials and structures [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2007, 31: 307.
- [46] LEMAITRE J. A course on damage mechanics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [47] DING Z D, LI J. A physically motivated model for fatigue damage of concrete [J]. *International Journal of Damage Mechanics*, 2018, 27(8): 1192.
- [48] 李杰, 吴建营, 陈建兵. 混凝土随机损伤力学[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- LI Jie, WU Jianying, CHEN Jianbing. Stochastic damage mechanics of concrete structures [M]. Beijing: Science Press, 2014.
- [49] BAZANT Z P, OH B H. Crack band theory for fracture of concrete [J]. *Matériaux et Construction*, 1983, 16: 155.