文章编号：0253-374X(2017)01-0124-03　　DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2017.01.018

不含三角形的图的独立数和匹配数关系

陈　明[1,2]，李雨生[1]

（1. 同济大学 数学科学学院，上海 200092；2. 嘉兴学院 数理与信息工程学院，浙江 嘉兴 314000）

摘要：设 $\alpha(G)$，$\beta(G)$ 和 $n(G)$ 分别表示图 G 的独立数、匹配数和阶数. 图的独立数和匹配数是图的两个较重要的参数. 证明了对于不含三角形且最大度不超过 5 的图，独立数、匹配数和阶数之间存在两个最优的数量关系.

关键词：独立数；匹配数；三角形；最大度

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A

Independence and Matching Numbers in Triangle Free Graphs

CHEN Ming[1,2], *LI Yusheng*[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Mathematics Physics and Information Engineering, Jiaxing University, Jiaxing 314000, China)

Abstract: Let $\alpha(G)$, $\beta(G)$ and $n(G)$ be the independence number, the matching number and the order of a graph G, respectively, the independence number and the matching number are two more important parameters for a graph. In this paper, it is proved that there exist two optimal numerical relationships between them for the graphs which are K_3-free and the maximum degree is 5 at most.

Key words: independence number; matching number; triangle; maximum degree

1　研究背景

本文研究的图均为简单无向图. 设 G 是一个图，其点集和边集分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$，并分别用 $n(G)$，$\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 表示图 G 的阶数、最大度以及最小度. 对于图 G 中的任意一点 u，用 $N(u)$ 表示点 u 在该图中的邻域，即 $N(u)=\{v|uv\in E(G)\}$，并用 $N[u]$ 表示点 u 在该图中的闭邻域，即 $N[u]=N(u)\cup\{u\}$，点 u 在图 G 中的度数 $d(u)=|N(u)|$. 若 U 是图 G 的一个顶点子集，则用 $G\backslash U$ 表示由点集 $V(G)\backslash U$ 在图 G 中的诱导子图. 若 S 是图 G 的一个顶点子集，且满足 S 中的任意两个点在图 G 中都不相邻，则称 S 是图 G 的一个独立集. 把图 G 的最大独立集的阶数称为图 G 的独立数，用 $\alpha(G)$ 表示. 若 M 是图 G 的一个边子集，且满足 M 中的任意两条边在图 G 中都没有公共邻点，则称 M 是图 G 的一个匹配. 图 G 中的最大匹配的边数称为图 G 的匹配数，用 $\beta(G)$ 来表示. 其他有关图的定义，可参考文献[1].

关于图的独立数 $\alpha(G)$ 和匹配数 $\beta(G)$ 的线性组合问题，有一个著名的结果：对于任意图 G 都有

$$n(G)-2\beta(G)\leqslant\alpha(G)\leqslant n(G)-\beta(G)\qquad(1)$$

由式(1)，很容易得到两个平凡的不等式

$$\alpha(G)+2\beta(G)\geqslant n(G)\qquad(2)$$

$$\alpha(G)+\beta(G)\leqslant n(G)\qquad(3)$$

对于不等式(2)，是否存在比 2 更小的数 r 使得 $\alpha(G)+r\beta(G)\geqslant n(G)$ 成立？而不等式(3)，要使得 $s\alpha(G)+\beta(G)\geqslant n(G)$ 成立，s 至少要多大？

针对第一个问题，若 $G=K_3$，则不存在比 2 还小的实数 r 使得 $\alpha(G)+r\beta(G)\geqslant n(G)$ 成立；关于第二个问题，s 可能是任意大的一个数. 例如：当 $G=K_n$ 时，$\alpha(G)=1$，所以要使得 $s\alpha(G)+\beta(G)\geqslant n(G)$ 成立，s 不能小于 $n/2$. 对于上述两个问题，M. A. Henning 等[2]以及 Felix Joos[3]分别针对不含 K_3 且最大度为 3 和不含 K_3 且最大度为 4 的图确定了 r 和 s 的值. 本文对不含 K_3 且最大度不超过 5 的图进行探讨，得到如下结果：

定理 1　设 G 是不含 K_3 且最大度不超过 5 的图，则 $\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant n(G)$.

定理 2　设 G 是不含 K_3 且最大度不超过 5 的图，则 $2\alpha(G)+\beta(G)\geqslant n(G)$.

收稿日期：2016-03-29
基金项目：国家自然科学基金(11331003)；浙江省自然科学基金(LY17F030020)；浙江省嘉兴市科技局项目(2016AY13011)
第一作者：陈　明(1981—)，男，讲师，博士生，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail：chen2001ming@163.com
通讯作者：李雨生(1954—)，男，教授，博士生导师，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail：li_yusheng@tongji.edu.cn

如果 G 是一个阶数为 n 的图,且其团数 $\omega(G)<k$,独立数 $\alpha(G)<l$,则称图 G 为 (k,l,n) 图. 文献[4]中,详细描述了 $(3,l,n)$ 图的结构性质,由此可知 $(3,6,17)$ 图的最大度为 5,故对于 $(3,6,17)$ 图有 $\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)=5+\frac{3}{2}\times 8=17=n(G)$. 因此,在定理 1 中,常数 $r=\frac{3}{2}$ 已达到最小.

2　主要结果的证明

为了证明上述结论,将用到下面两个著名的定理.

定理 3[5]　设 G 是一个阶数为 $n(G)$、独立数为 $\alpha(G)$ 且不含 K_3 的图,则图 G 的边数 $e(G)$ 满足 $e(G)\geqslant 6n(G)-13\alpha(G)$.

由定理 3 很容易得到下面的推论.

推论 1　若 G 是不含 K_3 且最大度不超过 5 的图,则 $\alpha(G)\geqslant\frac{7}{26}n(G)$.

若一个图 G 存在覆盖所有点的匹配,则称该匹配是图 G 的完美匹配. 在连通图 G 中,如果对任意的一点 $v\in V(G)$,$G\backslash v$ 都有完美匹配,则称 G 是因子临界的.

定理 4[6]　设 G 是一个图,则存在一个顶点子集 $X\subseteq V(G)$ 使得

$$\beta(G)=\frac{1}{2}(n(G)+|X|-o(G\backslash X))$$

并且图 $G\backslash X$ 的每一个奇分支都是因子临界的,其中 $o(G\backslash X)$ 表示图 $G\backslash X$ 的奇分支数.

2.1　定理 1 的证明

利用反证法,假设定理 1 不成立,并令图 G 为阶数极少的反例,先对图 G 的性质进行探讨,最终得出矛盾结果.

引理 1　图 G 是连通的,且 $\delta(G)\geqslant 2$.

证明　图 G 的极小性确保了其连通性. 设图 G 中存在一个点 $u\in V(G)$ 且 $d(u)\leqslant 1$,令 $G'=G\backslash N[u]$,则 $n(G')\geqslant n(G)-2$. 因此

$$\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant(\alpha(G')+1)+\frac{3}{2}(\beta(G')+1)\geqslant$$
$$\alpha(G')+\beta(G')+\frac{5}{2}>n(G')+2\geqslant n(G)$$

这与图 G 是极少反例矛盾,故原结论成立.

引理 2　图 G 中不存在桥 e 使得图 $G\backslash e$ 有因子临界的连通分支.

证明　假设 $e=uv$ 是图 G 中使得 $G\backslash e$ 有因子临界的连通分支 C 的桥. 令 $u\in V(C)$,以及 $G'=G[V(G)\backslash(V(C)\cup\{v\})]$,则 $\alpha(G')+\frac{3}{2}\beta(G')\geqslant n(G')$. 因为 C 是因子临界的连通分支,故 $G[(V(C)\cup\{v\}]$ 存在完美匹配. 又因为 $\alpha(G)\geqslant\alpha(G')+\alpha(C)$ 以及 $\beta(G)\geqslant\beta(G')+\frac{1}{2}(n(C)+1)$,所以

$$\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant(\alpha(G')+\alpha(C))+\frac{3}{2}[\beta(G')+$$
$$\frac{1}{2}(n(C)+1)]\geqslant n(G')+\alpha(C)+$$
$$\frac{3}{4}(n(C)+1)=n(G)+\alpha(C)-$$
$$\frac{1}{4}(n(C)+1)$$

令 $f(C)=\alpha(C)-\frac{1}{4}(n(C)+1)$,下面证明 $f(C)\geqslant 0$. 当 $n(C)=1$ 时,$f(C)=1-\frac{1}{4}(1+1)>0$. 注意到不存在 3 个点的不含三角形的因子临界图,故 $n(C)\neq 3$. 当 $n(C)=5$ 时,利用推论 1 也可以得 $\alpha(C)\geqslant 2$,所以 $f(C)\geqslant 2-\frac{1}{4}(5+1)>0$. 当 $n(C)=7$ 时,根据 Ramsey 数 $R(3,3)=6$ 可知 $\alpha(C)\geqslant 3$,所以 $f(C)\geqslant 3-\frac{1}{4}(7+1)>0$. 类似验证当 $n(C)=9,11,13$ 时均有 $f(C)\geqslant 0$. 当 $n(C)>13$,由推论 1 可得

$$f(C)\geqslant\frac{7}{26}n(C)-\frac{1}{4}(n(C)+1)=\frac{n(C)-13}{52}>0$$

这与图 G 是极少反例矛盾,故原结论成立.

引理 3　图 G 既不是因子临界的,也不含有完美匹配.

证明　假设 G 是因子临界的,则 $n(G)$ 是一个奇数,且 $\beta(G)=\frac{1}{2}(n(G)-1)$. 根据推论 1 可知

$$\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant\frac{7}{26}n(G)+\frac{3}{4}(n(G)-1)=$$
$$n(G)+\frac{n(G)-39}{52}$$

显然,当 $n(G)\geqslant 39$ 时有 $\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant n(G)$. 当 $n(G)=37$ 时,根据推论 1 可知,$\alpha(G)\geqslant\frac{7}{26}\times 37>9$,所以 $\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant 10+\frac{3}{4}(37-1)=37=n(G)$. 当 $n(G)=11$ 时,由经典 Ramsey 数 $R(3,4)=9$,可知 $\alpha(G)=4$,所以 $\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant 4+\frac{3}{4}(11-1)\times 11=n(G)$. 类似的方法,可以验证当 $n(G)$ 为

小于37的奇数时均有$\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant n(G)$. 矛盾.

假设图G含有完美匹配,则$n(G)$是一个偶数,且$\beta(G)=n(G)/2$,所以有

$$\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant\frac{7}{26}n(G)+\frac{3}{4}n(G)=\frac{53n(G)}{52}>n(G)$$

矛盾,证毕.

下面利用以上引理来证明定理1.

由引理3可知,图G中满足定理4的顶点子集$X\neq\Phi$. 分别用c_i和c_{i^+}表示$G\backslash X$中阶数为i以及至少为i的奇分支的个数,n_{i^+}表示$G\backslash X$中阶数至少为i的所有奇分支的点数,R表示既不在$G\backslash X$的奇分支中也不在X中的点集. 由于图G的最大度不超过5,由引理2得$5|X|\geqslant 2o(G\backslash X)$,即$|X|-o(G\backslash X)\geqslant -\frac{3}{5}o(G\backslash X)$,故

$$\beta(G)=\frac{1}{2}(n(G)+|X|-o(G\backslash X))\geqslant\frac{n(G)}{2}-\frac{3}{10}o(G\backslash X)\tag{4}$$

由推论1,$\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant n(G)$等价于$\beta(G)\geqslant\frac{19}{39}n(G)$,因此假设$\frac{19}{39}n(G)>\beta(G)=\frac{1}{2}(n(G)+|X|-o(G\backslash X))$, 即有

$$n(G)-|X|>\frac{40}{39}n(G)-o(G\backslash X)\tag{5}$$

因为$n(G)-|X|=c_1+5c_5+7c_7+9c_9+n_{11^+}+|R|$,结合式(5)可得

$$2c_1+6c_5+8c_7+10c_9+c_{11^+}+n_{11^+}+|R|>\frac{40}{39}n(G)$$

即有

$$0>\frac{n(G)}{4}-\frac{78}{160}c_1-\frac{234}{160}c_5-\cdots-\frac{1\,092}{160}c_{27}-\frac{39}{160}c_{29^+}-\frac{39}{160}n_{29^+}-\frac{39}{160}|R|\tag{6}$$

由于图G的独立数至少是$G\backslash X$中奇分支的独立数以及R的独立数之和,结合推论1以及不等式(4)和(6)可得

$$\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant(c_1+2c_5+\cdots+7c_{25}+8c_{27}+\frac{7n_{29^+}}{26}+\frac{7}{26}|R|)+\frac{3}{2}\left(\frac{n(G)}{2}-\frac{3}{10}o(G\backslash X)\right)=\frac{3n(G)}{4}+\frac{11}{20}c_1+\frac{31}{20}c_5+\cdots+\frac{131}{20}c_{25}+\frac{151}{20}c_{27}-\frac{9}{20}c_{29^+}+\frac{7n_{29}}{26}+\frac{7}{26}|R|\geqslant n(G)+\frac{1}{16}c_1+\frac{14}{160}c_5+\cdots+\frac{34}{160}c_{25}+\frac{116}{160}c_{27}-\frac{111}{160}c_{29^+}+\frac{53}{2\,080}n_{29}+\frac{53}{2\,080}|R|\geqslant n(G)+\frac{1}{16}c_1+\frac{14}{160}c_5+\cdots+\frac{34}{160}c_{25}+\frac{116}{160}c_{27}+\frac{53}{2\,080}|R|+\left(\frac{53}{2\,080}\times 29-\frac{111}{160}\right)c_{29}\geqslant n(G)+\frac{1}{16}c_1+\frac{14}{160}c_5+\cdots+\frac{34}{160}c_{25}+\frac{116}{160}c_{27}+\frac{94}{2\,080}c_{29^+}+\frac{53}{2\,080}|R|$$

因为$X\neq\Phi$,所以

$$\frac{1}{16}c_1+\frac{14}{160}c_5+\cdots+\frac{34}{160}c_{25}+\frac{116}{160}c_{27}+\frac{94}{2\,080}c_{29^+}+\frac{53}{2\,080}|R|>0$$

因此$\alpha(G)+\frac{3}{2}\beta(G)\geqslant n(G)$,这与图$G$是极少反例矛盾,故定理1证毕.

2.2 定理2的证明

利用反证法,类似于定理1的证明,同样可以得到定理2,故不再重述. 此外,由定理1亦可得到定理2.

对于任意的图G均有$n(G)-2\beta(G)\geqslant 0$. 根据定理1可知

$$\alpha(G)\geqslant n(G)-\frac{3}{2}\beta(G)=\frac{2n(G)-3\beta(G)}{2}=\frac{n(G)-\beta(G)}{2}+\frac{n(G)-2\beta(G)}{2}\geqslant\frac{n(G)-\beta(G)}{2}$$

即$2\alpha(G)+\beta(G)\geqslant n(G)$,证毕.

参考文献:

[1] Bollobás B. Modern graph theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[2] Henning M A, Löenstein C, Rautenbach D. Independent sets and matchings in subcubic graphs[J]. Discrete Math, 2012, 312: 1900.

[3] Joos F. Independence and matching numbers in graphs with maximum degree 4[J]. Discrete Math, 2014, 323: 1.

[4] Grinstead C M, Roberts S M. On the Ramsey numbers R(3, 8) and R(3, 9)[J]. Journal of Combinatorial Theory: Series B, 1982, 33(1): 27.

[5] Kreher D L, Radziszowski S P. Minimum triangle-free graphs [J]. Ars Combinatoria, 1991, 31: 65.

[6] Edmonds J. Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices[J]. J Res Natl Bur Stand B, 1965, 69: 125.