文章编号：0253-374X(2017)08-1240-03

DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2017.08.020

拟对角扩张 C^*-代数的性质

范庆斋[1,2]，方小春[1]，梁月亮[3]

(1. 同济大学 数学系，上海 200092；2. 上海海事大学 文理学院数学系，上海 201306；3. 中北大学 理学院数学系，山西 太原 030051)

摘要：$0\to J\to A\to B\to 0$ 是一个拟对角扩张. 证明以下结论：① 如果 J 和 B 具有弱可比性质，则 A 也具有弱可比性质；② 如果 J 和 B 具有强消去性质，则 A 也具有强消去性质；③ 如果 J 和 B 具有 n-无孔性质，则 A 也具有 n-无孔性质.

关键词：C^*-代数；拟对角扩张；Cuntz 半群

中图分类号：O177　　　**文献标志码**：A

Some Properties of the Quasidiagonal Extension C^*-algebras

FAN Qingzhai[1,2]，*FANG Xiaochun*[1]，*LIANG Yueliang*[3]

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Mathematics, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China; 3. School of Sciences, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: Let $0\to J\to A\to B\to 0$ be a quasidiagonal extension. We show the following results: ① suppose that J and B have the weakly comparison properties, then A has the weakly comparison property. ② suppose that J and B have the strictly cancellation properties, then A has the strictly cancellation property. ③ suppose that J and B have the n-unperforated properties , then A has the n-unperforated property.

Key words: C^*-algebra; quasidiagonal extension; Cuntz semigroup

设 $0\to J\to A\xrightarrow{\pi}B\to 0$ 是一个 C^*-代数的短正合列. 一般情况下可以通过研究 A 的理想 J 和商代数 B 的性质，来研究 A 的性质. 例如张爽等在文献[1-2]中，证明了如果 J 和 B 是实秩零的 C^*-代数并且满足 J 中的每个投影可以提升到 A 中，则 A 也是实秩零的 C^*-代数. 如果对于 C^*-代数的短正合列加上条件，例如称扩张是拟对角扩张，是指存在 J 中由投影组成的近似单位元 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得对于任意的 $a\in A$ 有，$\lim\limits_{n\to\infty}||r_nx-xr_n||=0$. 在文献[3]中，知道如果 B 和 J 是拟对角的 C^*-代数，并且扩张是拟对角扩张，则 A 也是拟对角的 C^*-代数. 在文献[4]中，林华新等得到如果 B 和 J 是迹拓扑秩零(迹拓扑秩零的定义见文献[5-6])的 C^*-代数，并且扩张是拟对角扩张，则 A 也是迹拓扑秩零的 C^*-代数. 在文献[7]中，方小春等证明了如果 B 和 J 是迹拓扑秩不超过 1(迹拓扑秩不超过 1 的定义见文献[5-6])的 C^*-代数，并且扩张是拟对角扩张，则 A 也是迹拓扑秩不超过 1 的 C^*-代数.

Cuntz 半群在 C^*-代数的分类中有重要的应用. 不能用 Elliott 不变量区分的 C^*-代数可以通过他们的 Cuntz 半群来区分. 例如在文献[8]中，Toms 举出反例对于两个不同的单的 AH 代数，它们的 Elliott 不变量一样；但是 Cuntz 半群不一样，一个具有弱无孔性质，一个不具有弱无孔性质.

在本文中设 $0\to J\to A\xrightarrow{\pi}B\to 0$ 是一个拟对角扩张. 证明以下结论：① 如果 B 和 J 具有弱可比性质，则 A 也具有弱可比性质；② 如果 B 和 J 具有强消去性质，则 A 也具有强消去性质；③ 如果 B 和 J 具有 n-无孔性质，则 A 也具有 n-无孔性质.

1　预备知识

M 是一个序半群，设 $x,y\in M$ 记 $x\leqslant^* y$，如果存在非零的元素 $z\in M$ 使得 $x+z=y$.

定义 1[9]　称一个序半群 M 是弱可比的，是指对于任意的非零元 $x,z\in M$，满足 $x\leqslant z$，并且存在自然数 k 和 $y\in M$ 满足 $ky\leqslant z$，则有 $y\leqslant x$.

定义 2[9]　称一个序半群 M 具有严格比较性质，是指对于任意的 $a,b,c\in M$，如果 $a+c\leqslant^* b+c$，则可以得到 $a\leqslant^* b$.

收稿日期：2016-12-06
基金项目：国家自然科学基金(11571008，11501357)
第一作者：范庆斋(1976—)，男，理学博士，副教授，主要研究方向为算子代数及其应用. E-mail：qzfan@shmtu.edu.cn

定义 3[10] 称一个序半群 M 具有 n--无孔性质，是指对于任意的 $a,b,c\in M$，如果 $na+c\leqslant nb+c$，可以存在某个 $d\in M$，使得 $a+d\leqslant b+d$.

设 A 是有单位元的 C^* -代数，$M_n(A)$ 表示由 A 中的元素构成的 $n\times n$ 矩阵的全体. $M_\infty(A)$ 表示 $(M_\infty(A),\varphi_n)$ 的代数归纳的极限. 其中 φ_n: $M_n(A)\to M_{n+1}(A)$ 满足 $a\to \mathrm{diag}(a,0)$. $M_\infty(A)_+(M_n(A)_+)$ 表示 $M_\infty(A)(M_n(A))$ 中正元的全体. 对于任意的 $M_\infty(A)$ 中正元 a 和 b 用 $a\oplus b$ 来表示 $M_\infty(A)$ 中的正元 $\mathrm{diag}(a,b)$，对于任意的 $a,b\in M_\infty(A)_+$，称 a Cuntz 子等价于 b，记为 $a\lesssim b$，如果存在 $(v_n)_{n=1}^\infty\subset M_\infty(A)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}||v_nbv_n^*-a||=0$. 称 a 和 b 是 Cuntz 等价的，记为 $a\sim b$，如果 $a\lesssim b$ 并且 $b\lesssim a$. 与 a 中等价类的全体记为 $\langle a\rangle$，定义 A 的 Cuntz 半群为 $W(A):=M_\infty(A)_+/\sim$.

$W(A)$ 是一个有正序的半群定义加法

$$\langle a\rangle+\langle b\rangle=\langle a\oplus b\rangle$$

和半序

$$\langle a\rangle\leqslant\langle b\rangle\Leftrightarrow a\lesssim b.$$

称一个 C^* -代数 A 具有弱可比性质，是指 A 的 Cuntz 半群 $W(A)$ 是弱可比的. 称一个 C^* -代数 A 具有严格消去性质是指 A 的 Cuntz 半群 $W(A)$ 具有严格消去性质. 称一个 C^* -代数 A 具有 n-无孔性质是指 A 的 Cuntz 半群 $W(A)$ 具有 n-无孔性质.

定义 4

设 $0\to J\to A\xrightarrow{\pi}B\to 0$ 是一个 C^* -代数的短正和列，称这个短正和列扩张是拟对角扩张，是指存在由 J 中的由投影组成的近似单位元 $\{r_n\}_{n=1}^\infty$，使得对于任意的 $a\in A$ 有，$\lim\limits_{n\to\infty}||r_nx-xr_n||=0$.

引理 1[9] 设 $0\to J\to A\to B\to 0$ 是一个 C^* -代数的拟对角的扩张，则对于任意的正元 $a,b\in M_k(A)_+$ 在 $W(B)$ 满足 $\pi(a)\lesssim\pi(b)$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在充分大的 $n\in N$ 和投影 $P_n\in J$，使得 $((1-P_n)\otimes 1_k)a(((1-P_n)\otimes 1_k)-\varepsilon/2)_+\lesssim((1-p_n)\otimes 1_k)b(((1-p_n)\otimes 1_k)-\varepsilon/4)_+$.

2 主要结果

定理 1 设 $0\to J\to A\to B\to 0$ 是一个 C^* -代数的拟对角的扩张. 假设 J 和 B 具有弱可比性质，则 A 也具有弱可比性质.

证明 证明 $W(A)$ 具有弱可比性质即可，也就是对于任意的非零元 $x,z\in M$，满足 $x\lesssim z$，并且存在自然数 k 和 $y\in M$ 满足 $ky\lesssim z$，证明 $y\lesssim x$，也就是对于任意的 $\varepsilon>0$，证明 $(y-\varepsilon)_+\lesssim x$ 即可. 不失一般性，假设 x,y,z 在 A_+ 中，由于 $0\to J\to A\to B\to 0$ 是一个 C^* -代数的拟对角的扩张，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在充分大的 $n\in N$ 和投影 $P_n\in J$，使得

$$\|x-P_nxP_n-(1-P_n)x(1-P_n)\|<\varepsilon/4$$
$$\|y-P_nyP_n-(1-P_n)y(1-P_n)\|<\varepsilon/4$$
$$\|z-P_nzP_n-(1-P_n)z(1-P_n)\|<\varepsilon/4.$$

有

$$(x-\varepsilon/2)_+\lesssim P_nxP_n+((1-P_n)x(1-P_n)-\varepsilon/4)_+,$$
$$(y-\varepsilon/2)_+\lesssim P_nyP_n+(1-P_n)y(1-P_n)-\varepsilon/4)_+.$$
$$(z-\varepsilon/2)_+\lesssim P_nzP_n+((1-P_n)z(1-P_n)-\varepsilon/4)_+$$

由于 $x\lesssim z$ 并且 $ky\lesssim z$，因此有 $P_nxP_n\lesssim P_nzP_n$，$kP_nyP_n\lesssim kP_nzP_n$.

由于 P_nxP_n,P_nyP_n,P_nzP 都在 J 中，并且 J 具有弱可比性质，有 $p_nyp_n\lesssim p_nxp$.

同时有 $\pi(x)\lesssim\pi(z)$ 和 $k\pi(y)\lesssim\pi(z)$ 成立. 由于 B 具有弱可比性质，因此有 $\pi(y)\lesssim\pi(x)$. 由引理 1 得到：

$$(1-p_n)y(1-p_n)-\varepsilon/2)_+\lesssim(1-p_n)x(1-p_n)-\varepsilon/4)_+$$

因此得到：

$$\begin{aligned}(y-\varepsilon)_+&\lesssim P_nyP_n+((1-P_n)y(1-P_n)-\varepsilon/2)_+\\&\lesssim p_nxp_n+((1-p_n)x(1-p_n)-\varepsilon/4)_+\\&\lesssim x.\end{aligned}$$

定理 2 设 $0\to J\to A\to B\to 0$ 是一个 C^* -代数的拟对角的扩张. 假设 J 和 B 具有严格的消去性质，则 A 也具有严格的消去性质.

证明 只有证明 $W(A)$ 具有严格的消去性质即可，也就是对于任意的 $a,b,c\in W(A)$，如果 $a+c\leqslant^* b+c$，只要证明 $a\leqslant^* b$ 即可，也就是对于任意的 $\varepsilon>0$ 证明存在 $e'\in W(A)$ 满足 $(a-\varepsilon)_++e'\lesssim b$ 即可.

不妨假设 a,b 在 A_+ 中，并且假设 $ac=0,bc=0$. 由于 $a+c\leqslant^* b+c$，因此存在 $d\in A_+$，使得 $a+c+d\lesssim b+c$，不妨设 $ad=cd=0$. 由于 $0\to J\to A\to B\to 0$ 是一个 C^* -代数的拟对角的扩张，对于任意 $\varepsilon>0$，和充分大的 $n\in\mathbf{N}$，存在投影 $p_n\in J$ 满足：

$$\|a-p_nap_n-(1-p_n)a(1-p_n)\|<\varepsilon/2,$$
$$\|b-p_nbp_n-(1-p_n)b(1-p_n)\|<\varepsilon/4,$$
$$\|c-p_ncp_n-(1-p_n)c(1-p_n)\|<\varepsilon/2,$$
$$\|d-p_ncp_n-(1-p_n)d(1-p_n)\|<\varepsilon/2$$

由于 $a+c+d\lesssim b+c$，因此有：$p_nap_n+p_ncp_n+p_ndp_n\lesssim p_nbp_n+p_ncp_n$，由于 $p_nap_n,p_nbp_n,p_ncp_n,p_ndp_n$ 在 J 中并且 J 具有严格的消去性质，因此存在 $e'\in J_+$ 使得 $p_nap_n+e'\lesssim p_nbp_n$. 同时有

$\pi(a+b+d)\leqslant\pi(b+c)$，并且 B 具有严格的消去性质,因此存在 $e\in A_+$. 不妨设 $ae=0$,使得 $\pi(a+e)\leqslant\pi(b)$. 由引理1，有，$((1-p_n)(a+e)(1-p_n)-\varepsilon/2)_+\leqslant((1-p_n)b(1-p_n)-\varepsilon/4)_+$

因此有

$(a-\varepsilon)_+ + e' \leqslant p_nap_n + e' + ((1-p_n)a(1-p_n)-\varepsilon/2)_+ \leqslant p_nbp_n+((1-p_n)b(1-p_n)-\varepsilon/4)_+. \leqslant b$

定理3 设 $0\to J\to A\to B\to 0$ 是一个 C^*-代数的拟对角的扩张. 假设 J 和 B 具有 n-无孔性质. 则 A 具有 n-无孔性质.

证明 只要证明 $W(A)$ 具有 n-无孔性质即可，也就是对于任意的 $a,b,c\in W(A)$，如果 $na+c\leqslant nb+c$,证明存在 $d\in W(A)$,使得 $a+d\leqslant b+d$ 即可.

不妨假设 a,b,c 在 A_+ 中,并且假设 $ac=bc=ab=0$,由于 $0\to J\to A\to B\to 0$ 是一个 C^*-代数的拟对角的扩张. 对于任意 $\varepsilon>0$,和充分大的 $n\in N$,存在投影 $p_n\in J$ 满足

$$\|a-p_nap_n-(1-p_n)a(1-p_n)\|<\varepsilon/2,$$
$$\|b-p_nbp_n-(1-p_n)b(1-p_n)\|<\varepsilon/4,$$
$$\|c-p_ncp_n-(1-p_n)c(1-p_n)\|<\varepsilon/2$$

由于 $na+c\leqslant nb+c$,因此有 $np_nap_n+p_ncp_n\leqslant np_nbp_n+p_ncp_n$,由于 p_nap_n,p_nbp_n,p_ncp_n 在 J 中并且 J 具有 n-无孔性质,因此存在 $e'\in J_+$ 使得 $p_nap_n+e'\leqslant p_nbp_n+e'$. 同时有 $\pi(na+c)\leqslant\pi(nb+c)$，并且 B 具有 n-无孔性质,因此存在 $e\in A_+$ 不妨设 $ae=be=0$,使得 $\pi(a+e)\leqslant\pi(b+e)$.

由引理1，有：

$((1-p_n)a(1-p_n)-\varepsilon/2)_+ \oplus (1-p_n)e(1-p_n) \leqslant ((1-p_n)b(1-p_n)-\varepsilon/4)_+ \oplus (1-p_n)e(1-p_n)$

因此有 $(a-\varepsilon)_+ + e' + (1-p_n)e(1-p_n)\leqslant p_nap_n+e'+((1-p_n)a(1-p_n)-\varepsilon/2)_+\oplus(1-p_n)e(1-p_n)\leqslant p_nbp_n+e'+((1-p_n)b(1-p_n)-\varepsilon/4)_+\oplus(1-p_n)e(1-p_n)\leqslant b+e'\oplus(1-p_n)e(1-p_n)$

取 $d=e'\oplus(1-p_n)e(1-p_n)$,得到 $(a-\varepsilon)_++d\leqslant b+d$.

参考文献：

[1] BROWN L C, PEDERSON G K. C^*-algebras of real rank zero [J]. Journal of Functional analysis, 1991, 99(1): 131.

[2] ZHANG S. C^*-algebras with real rank zero and their internal structure of their corona and multiplier part I[J]. Pacific J. Math. 1992, 155(1): 169.

[3] BROWN N P, OZAWA N. C^*-algebras and finite dimensional approximations [M]. [S. l.]: American Mathematical Society, 2003.

[4] HU S W, LIN H X, XUE Y F. The tracial topological rank of extension C^*-algebras[J]. Math. Scand, 2004, 94(1): 125.

[5] LIN H. The tracial topological rank of C^*-algebras[J]. Proc. London Math. Soc., 2001(1): 199.

[6] LIN H. An introduction to the classification of amenable C^*-algebras[M]. [S.l.]: Word Scientific, 2001.

[7] FANG X C, ZHAO Y L. The extension of C^*-algebras with tracial topological rank no more than one[J]. Illinois Journal of Math., 2009, 35: 441.

[8] TOMS A. On the classification problem for nuclear C^*-algebras[J]. Ann. of Math., 2008, 3(167): 1059.

[9] WEHRUNG F. Injective positively ordered monoids I[J]. Journal of pure and applied algebras, 1992, 1(83): 43.

[10] WEHRUNG F. Restricted injectiveity transfer property and decompositions of separative positively ordered monoids[J]. Communications in Algebras, 1994, 5(22): 1747.

[11] LIANG Y L, FANG X C, FAN Q Z. Equivalent characterization for α-comparison property of non-simple C^*-algebras[J]. *Acta Mathematica Sinica China Series*, 2017, 60(4): 706.