

正交各向异性板带有一般孔形时应力分析

吕爱钟, 张晓莉, 王少杰

(华北电力大学 可再生能源学院, 北京 102206)

摘要: 采用复变函数方法研究面内均布荷载作用下带孔正交各向异性板的应力解析解. 对含一个正六角形孔或不规则孔的无限平板进行分析, 得到不同工况下(纤维角度、外荷载方向)孔边及部分孔外域的应力分布规律. 结果表明, 当单向荷载作用方向与孔边尖点指向垂直时, 若正交各向异性板的纤维按 0° 和 -90.0° 布置, 最大切向应力发生在孔边, 并且位于尖点位置, 但随着纤维角度的旋转, 孔边的最大应力点逐渐偏离尖点, 并且最大应力值也逐渐降低; 因此, 正交各向异性板的应力集中可以通过调整材料的纤维方向来改善. 除此之外, 当单向均布荷载 σ 的作用方向与坐标轴平行时, 该坐标轴与孔边界交点的切向应力均为 $-\sigma$.

关键词: 正交各向异性板; 解析解; 应力分析; 应力集中

中图分类号: O343.8

文献标志码: A

Stress Analysis for an Orthotropic Plate with a General Shaped Hole

LÜ Aizhong, ZHANG Xiaoli, WANG Shaojie

(School of Renewable Energy, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: The complex variables function method was used for analyzing the stresses in an infinite orthotropic plate with a hole under uniform in-plane loadings at infinity. When the hole was hexagonal or irregular shaped, the stress distributions along/near the hole boundary were obtained for different fiber angles and loading directions. The research shows that the maximum tangential stress occurs on the hole boundary and exactly in the sharp corner point, when the fiber orientation angles are 0° and -90.0° and the uniaxial loadings are perpendicular to the pointing direction of the sharp corner. However, the position of the maximum tangential stress will get farther from the sharp corner point with the rotating of the fiber orientation angles, and the magnitude of the maximum tangential stress decreases correspondingly. Therefore, the stress concentration of the

orthotropic plate can be decreased by adjusting the fiber orientation angles. In addition, the tangential stresses at the intersections of the axis of the uniaxial loadings σ and the hole boundary are always exactly the same value $-\sigma$ for the orthotropic plate.

Key words: orthotropic plate; analytical solution; stress analysis; stress concentration

随着现代科学技术的发展, 复合材料以其重量轻、比强度高、比刚度大、可设计性强等特点, 在航空航天、汽车、石油化工、建筑桥梁、舰船以及生物工程等领域得到了越来越广泛的应用. 常用的复合材料板多为各向异性板, 由于结构装配或功能方面的需求, 常常需要在板中打孔, 而各向异性板在不同方向呈现出不同的力学性能, 对于这种开孔结构来说, 特别突出的一个问题就是开孔引起的应力集中. 在荷载作用下, 开孔可能会对结构的承载能力、使用寿命产生严重影响, 因此, 精确计算出孔洞周边的应力分布对判断结构的稳定性以及采取何种加固措施等具有重要的指导意义. 为此, 国内外许多学者都对各向异性含孔结构进行了应力分析.

Lekhnitskii^[1-2]最早采用复变函数方法, 研究了带有一个椭圆孔的各向异性板在平面荷载作用下的应力计算问题. 在此后很长一段时期内, 只有圆孔或椭圆形孔才有精确解. 近几年来, 一些学者通过复变函数方法, 也研究了三角形孔^[3-6]、矩形孔^[6-9]、某六边形孔^[9]和多边形孔^[10]在无穷远处作用不同荷载时的孔边应力解析解. Ukadgaonker 等^[11]对不规则孔的孔边应力进行了分析. 但是, 上述研究成果获得的解析解只有在孔边才是适用的^[12], 所以上述研究中的算例也只对孔边应力进行了分析, 而没有涉及孔外域, 因此存在一定的局限性. 笔者^[12]曾对这一领

收稿日期: 2017-03-27

基金项目: 国家自然科学基金(11572126, 51704117); 中央高校基本科研业务费专项资金(NCEPU2016XS55)

第一作者: 吕爱钟(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为地下隧洞围岩的力学分析.

E-mail: lvaizhong@ncepu.edu.cn

通讯作者: 张晓莉(1990—), 女, 工学博士, 主要研究方向为地下隧洞围岩的力学分析. E-mail: xiaoli_zhang@ncepu.edu.cn

域进行了研究,找到了含任意孔形的正交各向异性隧洞应力计算的精确解析方法,并对马蹄形和直墙半圆拱形隧洞进行了孔边应力的分析,但是,并未对各向异性板中含有一些不规则形状孔等更复杂的孔形进行应力解析分析,对孔边应力集中明显的位置及其孔外域的应力分析也不够全面。

为了研究各向异性板开孔结构应力分布的特殊性,本文选取具有明显尖点的某不规则形状孔和正六角形孔为例,根据带孔正交各向异性板的应力解析解,从板不同的纤维方向、开孔形状和外荷载方向几个方面分析孔边及部分孔外域的应力,并且与各向同性开孔结构进行对比,总结正交各向异性板孔边及孔外域的应力分布规律. 不规则孔形在文献[11]中有讨论,但因为其解并未涉及孔外域的应力分布,本文探讨此孔形一方面是进行对比验证,更重要的是对孔外域的应力也进行研究,着重分析应力分布的规律. 正六角形孔在工程中应用得也很多,但至今尚未见到其精确的分析结果,其主要原因可能是缺乏可用的高精度的正六角形映射函数。

1 基本方程和应力解析解的求解

工程中常用的复合材料结构在很多场合都具有对称性,因此在很多情况下,各向异性的问题都可以化为正交各向异性的问题来讨论. 复变函数中的保角变换方法是求解孔洞问题的有效工具,对于正交各向异性问题,求解时涉及 3 套笛卡尔坐标系: $z = x + iy, z_1 = x + \mu_1 y, z_2 = x + \mu_2 y$, 通过建立 3 套极坐标系 $\zeta = \rho e^{i\theta}, \zeta_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \zeta_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ 可以将 z, z_1, z_2 3 个物理平面的孔外域分别映射到 ζ, ζ_1, ζ_2 3 个像平面的单位圆外域,映射函数分别用 $z = \omega(\zeta), z_1 = \omega_1(\zeta_1), z_2 = \omega_2(\zeta_2)$ 表示,其中, $z = \omega(\zeta)$ 可以表示为以下 Laurent 级数的形式^[13]:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^{-k}\right) \quad (1)$$

式中: R 和 C_k 是代表孔的大小和孔形的常数; k 为整数. 当 k 取较大的值时,式(1)可以代表足够多的孔形. 取 k 的最大值为 n . 由于 3 套笛卡尔坐标系 z, z_1, z_2 必须满足如下数学关系^[1-2]:

$$\begin{cases} z_1 = x + \mu_1 y = \gamma_1 z + \delta_1 \bar{z} \\ z_2 = x + \mu_2 y = \gamma_2 z + \delta_2 \bar{z} \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\gamma_1 = (1 - i\mu_1)/2, \gamma_2 = (1 - i\mu_2)/2, \delta_1 = (1 + i\mu_1)/2, \delta_2 = (1 + i\mu_2)/2, \mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \alpha_k$ 和 $\beta_k (k=1, 2)$ 是与材料性质有关的材料常数,且

$\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. 将式(1)代入式(2),并假设 3 套极坐标系在孔边界所对应的单位圆上满足 $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = \sigma = e^{i\theta}$, 可推导出 $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$ 和 $z_2 = \omega_2(\zeta_2)$ 的表达式和 ζ, ζ_1, ζ_2 之间的关系如下^[12]:

$$\begin{cases} z_1 = \omega_1(\zeta_1) = \gamma_1 R\left(\zeta_1 + \sum_{k=0}^n C_k \zeta_1^{-k}\right) + \delta_1 \bar{R}\left(\frac{1}{\zeta_1} + \sum_{k=0}^n \bar{C}_k \zeta_1^k\right) \\ z_2 = \omega_2(\zeta_2) = \gamma_2 R\left(\zeta_2 + \sum_{k=0}^n C_k \zeta_2^{-k}\right) + \delta_2 \bar{R}\left(\frac{1}{\zeta_2} + \sum_{k=0}^n \bar{C}_k \zeta_2^k\right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \gamma_1 R\left(\zeta_1 + \sum_{k=0}^n C_k \zeta_1^{-k}\right) + \delta_1 \bar{R}\left(\frac{1}{\zeta_1} + \sum_{k=0}^n \bar{C}_k \zeta_1^k\right) = \\ \gamma_1 R\left(\zeta + \sum_{k=0}^n C_k \zeta^{-k}\right) + \delta_1 \bar{R}\left(\bar{\zeta} + \sum_{k=0}^n \bar{C}_k \bar{\zeta}^{-k}\right) \\ \gamma_2 R\left(\zeta_2 + \sum_{k=0}^n C_k \zeta_2^{-k}\right) + \delta_2 \bar{R}\left(\frac{1}{\zeta_2} + \sum_{k=0}^n \bar{C}_k \zeta_2^k\right) = \\ \gamma_2 R\left(\zeta + \sum_{k=0}^n C_k \zeta^{-k}\right) + \delta_2 \bar{R}\left(\bar{\zeta} + \sum_{k=0}^n \bar{C}_k \bar{\zeta}^{-k}\right) \end{cases} \quad (4)$$

式(3)对任意形状的孔形都适用,式(4)对域内 ($|\zeta| \geq 1$)任意一点都成立。

如图 1 所示,考虑一个含孔正交各向异性板,承受分布于板边缘并作用在面内的力,孔形关于整体坐标系的 x 轴对称,局部坐标系 $x'Oy'$ 沿弹性主向. 如果板的尺寸远大于开孔的尺寸,并且开孔不在板边的附近,那么可以假定板无限大. 除此之外,假定作用在板内的荷载远大于体力,并且无 z 方向的分量,此时,体力可忽略不计,问题简化成了无限域中的平面应力问题. 根据平衡条件和变形协调条件可以得到应力函数 $F(x, y)$ 所满足的方程^[14]:

$$\begin{aligned} a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ 2a_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)的解与特征方程(6)的根有关.

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0 \quad (6)$$

式(6)的 4 个根必为共轭的复根,即 $\mu_1, \bar{\mu}_1$ 和 $\mu_2, \bar{\mu}_2$, 此处的 μ_1, μ_2 与式(2)中的相同.

只讨论 $\mu_1 \neq \mu_2$ 的情形,引入 2 个解析函数 $F_1(z_1), F_2(z_2)$, 则式(5)的解可以表示为

$$F = F_1(z_1) + \overline{F_1(z_1)} + F_2(z_2) + \overline{F_2(z_2)} \quad (7)$$

$$\text{令 } \Phi_1(z_1) = dF_1(z_1)/dz_1, \Phi_2(z_2) = dF_2(z_2)/dz_2$$

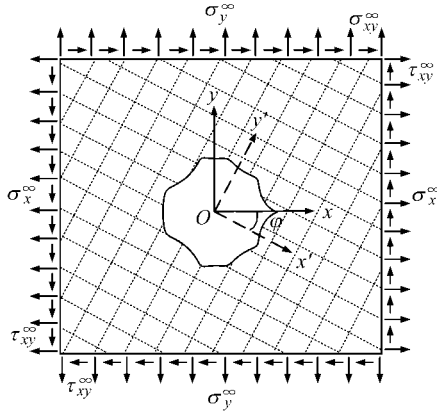


图 1 受面内均布荷载作用且带有任意形状孔的正交各向异性板

Fig. 1 An orthotropic plate with an arbitrary shaped hole under in-plane loadings

dz_2 , 这样, 求解各向异性板平面应力问题就转化为寻找满足相应的边界条件的应力解析函数 $\Phi_1(z_1)$ 和 $\Phi_2(z_2)$ 的问题。

用 $\Phi_1(z_1)$ 、 $\Phi_2(z_2)$ 表示的应力边界条件为

$$\begin{cases} \Phi_1(z_1) + \overline{\Phi_1(z_1)} + \Phi_2(z_2) + \overline{\Phi_2(z_2)} = f_1 \\ \mu_1 \Phi_1(z_1) + \overline{\mu_1 \Phi_1(z_1)} + \mu_2 \Phi_2(z_2) + \overline{\mu_2 \Phi_2(z_2)} = f_2 \end{cases} \quad (8)$$

式中出现的 z_1 、 z_2 是孔边点。因为讨论的是带孔无限域问题, 且孔边无外荷载, 则 $f_1 = f_2 = 0$, 且 $\Phi_1(z_1)$ 、 $\Phi_2(z_2)$ 具有以下形式:

$$\begin{cases} \Phi_1(z_1) = B^* z_1 + \Phi_1^0(z_1) \\ \Phi_2(z_2) = (B'^* + iC'^*) z_2 + \Phi_2^0(z_2) \end{cases} \quad (9)$$

式中: 实常数 B^* 、 B'^* 、 C'^* 可以通过无限远处的外荷载 (σ_x^∞ 、 σ_y^∞ 、 τ_{xy}^∞) 和与材料性质有关的常数 (α_1 、 α_2 、 β_1 、 β_2) 求出^[15]。

将式(3)的 $z_1 = \omega_1(\zeta_1)$ 、 $z_2 = \omega_2(\zeta_2)$ 代入到式(9)中后, $\Phi_1^0(z_1)$ 和 $\Phi_2^0(z_2)$ 可整理得出如下形式:

$$\begin{cases} \Phi_1^0(z_1) = \Phi_1^0[\omega_1(\zeta_1)] = \Phi_{1*}^0(\zeta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta_1^{-k} \\ \Phi_2^0(z_2) = \Phi_2^0[\omega_2(\zeta_2)] = \Phi_{2*}^0(\zeta_2) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta_2^{-k} \end{cases} \quad (10)$$

这里的 $\Phi_{1*}^0(\zeta_1)$ 、 $\Phi_{2*}^0(\zeta_2)$ 分别为单位圆外 ζ_1 和 ζ_2 的解析函数, 式中, $a_k = a_{1k} + ia_{2k}$, $b_k = b_{1k} + ib_{2k}$ ($k=0, \dots, \infty$), a_{1k} 、 a_{2k} 、 b_{1k} 、 b_{2k} 为待定实数。

因在孔的边界有 $\zeta_1 = \sigma = e^{i\theta}$ 、 $\zeta_2 = \sigma = e^{i\theta}$, 所以应力边界条件式(8)最终可以整理为如下形式:

$$\begin{cases} \text{Re}[\Phi_{1*}^0(\sigma) + \Phi_{2*}^0(\sigma)] = \\ - \text{Re}[B^* \omega_1(\sigma) + (B'^* + iC'^*) \omega_2(\sigma)] \\ \text{Re}[\mu_1 \Phi_{1*}^0(\sigma) + \mu_2 \Phi_{2*}^0(\sigma)] = \\ - \text{Re}[\mu_1 B^* \omega_1(\sigma) + \mu_2 (B'^* + iC'^*) \omega_2(\sigma)] \end{cases} \quad (11)$$

根据式(3)、式(10)和式(11), 采用幂级数解法。将 $\sigma^{-k} = \cos k\theta - i \sin k\theta$ 代入式(11)的左右两边并展开, 可根据 $\sin k\theta$ 、 $\cos k\theta$ ($k=1, \infty$) 前面的系数相等列出求解 a_k 、 b_k 的线性方程组, 具体计算过程略。

所以, 一旦正交各向异性板的弹性常数给定, 式(6)中的系数就可以确定^[15], 特征方程的根可解, 再根据给定的外荷载, 实常数 B^* 、 B'^* 、 C'^* 也可以求得。结合求解的 a_k 、 b_k , 再根据式(9)和式(10), 解析函数 $\Phi_1(z_1)$ 、 $\Phi_2(z_2)$ 就可以求解。而笛卡尔坐标系下和正交曲线坐标系下的应力分量也可以根据下式进行求解:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2\text{Re}[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y = 2\text{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} = -2\text{Re}[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2)] \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \sigma_\rho + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\rho - \sigma_\theta + 2i\tau_{\rho\theta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \end{cases} \quad (13)$$

需要注意的是, 在通常情况下, 正交各向异性板已知的是局部坐标系 $x'Oy'$ 下材料的主弹性常数(如图 1), 由此代入式(6)求得特征方程的根也是局部坐标系下的 μ_1' 和 μ_2' , 当板中的 2 组纤维分别按照 0° 和 -90.0° 交叉布置时(记为 $[0^\circ/-90.0^\circ]_s$), 整体坐标系与局部坐标系重合, 此时, $\mu_1 = \mu_1'$, $\mu_2 = \mu_2'$; 但当纤维角度发生旋转时, 例如按照 $[45.0^\circ/-45.0^\circ]_s$ 布置, 需要将此 μ_1' 、 μ_2' 代入式(14)中, 求出整体坐标系下的 μ_1 、 μ_2 ^[1], 应力求解才能进行。

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{\mu_1' \cos \varphi - \mu_2' \sin \varphi}{\cos \varphi + \mu_1' \sin \varphi} \\ \mu_2 = \frac{\mu_2' \cos \varphi - \mu_1' \sin \varphi}{\cos \varphi + \mu_2' \sin \varphi} \end{cases} \quad (14)$$

式中: φ 是局部坐标系 $x'Oy'$ 与整体坐标系 xOy 的夹角, 见图 1。

至此, 对于孔的边界, 由于 $\rho=1$ 、 $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta = \sigma = e^{i\theta}$, 应力分量非常容易求出, 而对于 $\zeta \neq \sigma$ 的孔外域点, 应力求解稍微复杂一些, 必须首先根据式(4)由 ζ 求出对应的 ζ_1 、 ζ_2 , 再根据 $\Phi_1(z_1)$ 、 $\Phi_2(z_2)$ 进行应力求解。需要注意的是, 由式(4)求出的 ζ_1 、 ζ_2 各有 $2n$ 个解, 但由于映射函数是将物理平面上的孔外域映射到像平面上的单位圆外域, 在这 $2n$ 个解中, 只有 n 个解在单位圆外域。除此之外, 再根据物理平面上的 2 个点映射到像平面上也相邻的原则, 可以找出 n 个解中符合题意的解。

本文得出的结果是适用于任意形状孔形和任意纤维角度的精确解, 只要孔的解析函数已知, 就可以

求出面内荷载作用下孔边及其周围的应力场。

2 算例分析和结果比较

2.1 不规则孔形的孔边切向应力分析

对于带有不规则孔形的正交各向异性板,文献[11]中考虑了由石墨-环氧树脂材料(G-E)制成的具有不同纤维方向($[0^\circ/-90.0^\circ]_s$, $[45.0^\circ/-45.0^\circ]_s$)的复合层压板,给出的不规则孔形的映射函数系数 C_k 为: $C_3=0.06, C_5=0.04, C_8=0.03, C_9=0.03$, 其他 C_k 均为零,特征方程的复根为:当 $[0^\circ/90.0^\circ]_s$ 时,有 $\mu_1=0+3.6404i, \mu_2=0+0.2747i$; 当 $[45.0^\circ/-45.0^\circ]_s$ 时,有 $\mu_1=-0.8597+0.5109i, \mu_2=0.8597+0.5109i$ 。

为了方便进行对比验证和分析,取上述参数与文献[11]完全相同,由于讨论的是无限大平板问题,孔的大小对应力场的求解没有影响,故本文中映射函数的 R 值直接取为 1.0。当板的无穷远处分别单独作用沿 x 轴或 y 轴方向的单向均布拉伸荷载时,即图 1 中 $\tau_{xy}^\infty=0$, 而 $\sigma_x^\infty=\sigma$ 或 $\sigma_y^\infty=\sigma$, 根据上文介绍的应力解析解的求解方法,通过自编 FORTRAN 程序,实现该不规则孔形孔边的应力分量的计算,结果如图 2 和图 3。由于孔边没有外荷载作用,所以在孔边,径向应力 $\sigma_r=0$, 剪应力 $\tau_{r\theta}=0$, 故本文图中虚线绘出的都是孔边的切向应力与外荷载的比值 σ_θ/σ 的分布,其中, θ 是 ξ 平面的极角。符号规定拉应力为正、压应力为负。

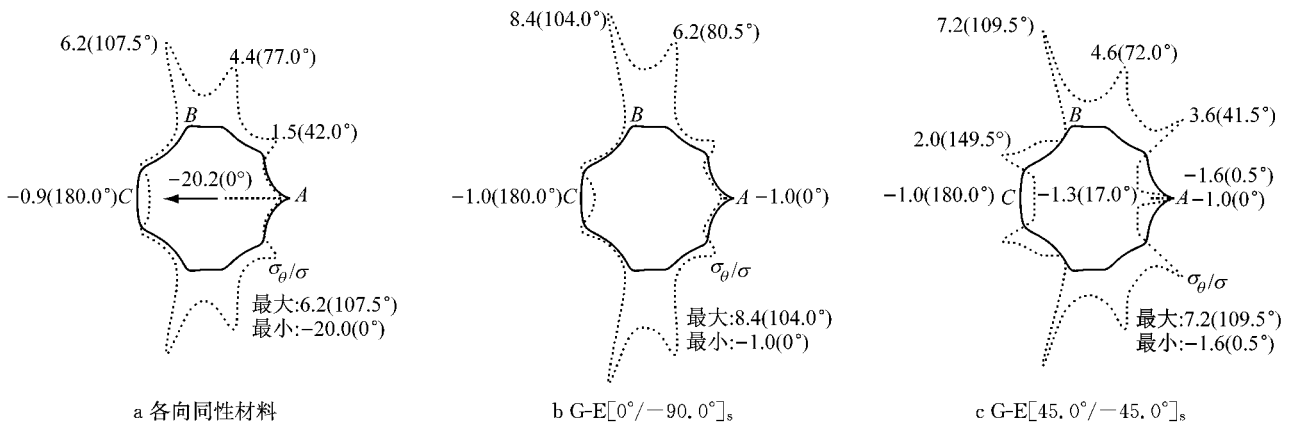


图 2 带有不规则孔形的 3 种材料结构在 $\sigma_x^\infty = \sigma$ 单独作用下的孔边切向应力分布

Fig.2 Distribution of normalized tangential stresses for three kinds of plates with irregular shaped hole under uniaxial loading $\sigma_x^\infty = \sigma$

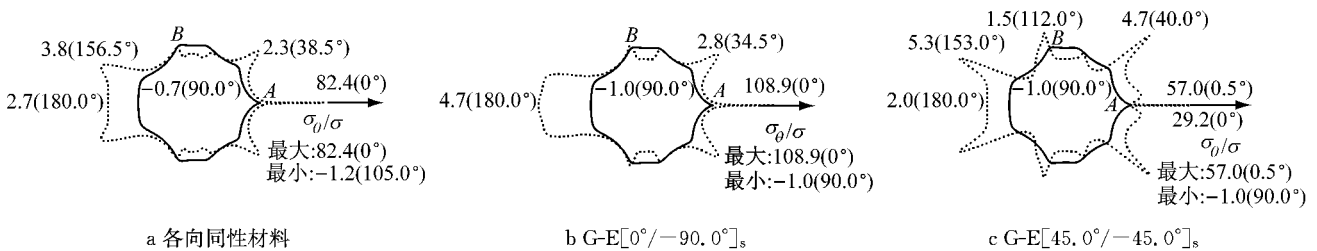


图 3 带有不规则孔形的 3 种材料结构在 $\sigma_y^\infty = \sigma$ 单独作用下的孔边切向应力分布

Fig.3 Distribution of normalized tangential stresses for three kinds of plates with irregular shaped hole under uniaxial loading $\sigma_y^\infty = \sigma$

首先将图 2b、2c 和图 3b、3c 的结果与文献[11]进行对比验证,发现文献[11]中获得的孔边切向应力的分布规律与本文中的结果基本一致,尤其是 $\theta=0^\circ$ 的点,两者得到的 σ_θ/σ 值完全相同。但是本文与文献[11]的结果最大的不同在于,图 3c 中最大切向应力的数值是 57.0,发生在 $\theta=0.5^\circ$ 的点,但是这个最大值的点却被文献[11]忽略了。

将这 2 种各向异性材料与各向同性材料进行对比,如图 2 和图 3,发现正交各向异性板孔边应力分布的一些特殊规律:对于各向同性材料,在 2 种单轴拉伸荷载作用下,孔边的最大应力集中发生在 $\theta=0^\circ$ 的尖点位置 A,当 $\sigma_x^\infty=\sigma$ 单独作用时,在 A 点产生的是最大压应力,而当 $\sigma_y^\infty=\sigma$ 单独作用时,在 A 点产生的是最大拉应力;但是对于正交各向异性材料,

孔边切向应力的最大值可能发生在尖点位置,如图 3b 中的尖点 A,也可能发生在尖点 A 的临近位置,如图 3c 中 $\theta=0.5^\circ$ 的点.

除此之外,对于正交各向异性材料,当荷载沿 x 轴方向作用时($\sigma_x^\infty=\sigma$),在与 x 轴相交的孔边 2 个点(A 点和 C 点)的切向应力均为压应力,且其大小都为 $-\sigma$,如图 2b、2c;当荷载沿 y 轴方向作用时($\sigma_y^\infty=\sigma$),在与 y 轴相交的孔边 2 个点的切向应力也均为压应力,且大小也都是 $-\sigma$,如图 3b、3c.而对于各向同性材料,在 2 种荷载作用下都没有这样的规律.但是 3 种材料的相同点是,当荷载作用方向与孔边尖点 A 的指向(x 轴方向)垂直时,如图 3,最大的切向应力集中都是发生在孔边的 A 处尖点或其临近的孔边点.

2.2 不规则孔形的孔外域切向应力分析

观察图 3 发现,在沿 y 轴方向荷载($\sigma_y^\infty=\sigma$)的

作用下,不规则孔形在 $\theta=0^\circ$ 的孔边点其切向应力集中非常明显,为了进一步研究孔外域的应力分布情况,图 4 中给出了在 $\theta=0^\circ、180.0^\circ$ 的板内,3 种材料结构所对应的切向应力与外荷载的比值 σ_θ/σ ,这在文献[11]中并没有研究.

由图 4 可以看出:各向同性材料最大切向应力产生在孔边(图 4a, $\rho=1.0000$),而对于正交各向异性材料则不一定,纤维角度按 $[0^\circ/-90.0^\circ]_s$ 布置时,最大切向应力产生在孔边(图 4b, $\rho=1.0000$),纤维角度按 $[45.0^\circ/-45.0^\circ]_s$ 布置时,最大切向应力产生在非常临近孔边的外部区域,如图 4c 中可以清晰地看出:在 $\rho=1.0024$ 对应的孔边右侧点, σ_θ/σ 达到最大值 34.1,而在 $\rho=1.0000$ 的孔边点, σ_θ/σ 只有 29.2;在 $\rho=1.2030$ 对应的孔边左侧点, σ_θ/σ 达到最大值 2.1,而在 $\rho=1.0000$ 的孔边点, σ_θ/σ 为 2.0.

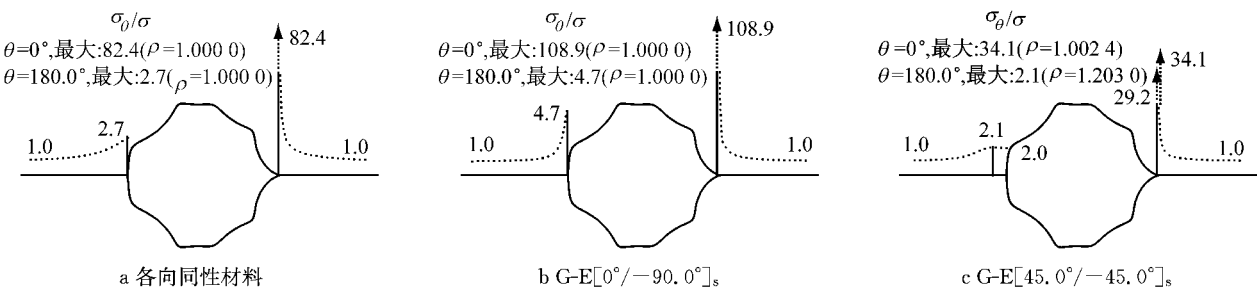


图 4 沿 y 轴单向拉伸荷载作用下($\sigma_y^\infty=\sigma$)不规则孔形在 $\theta=0^\circ、180.0^\circ$ 板内点的切向应力分布

Fig.4 Distribution of normalized tangential stresses in $\theta=0^\circ$ and 180.0° for irregular shaped hole with uniaxial loading $\sigma_y^\infty=\sigma$

2.3 正六角形孔的孔边切向应力分析

所研究的正六角形孔的映射函数系数 C_k 为^[13]: $C_5=0.0667, C_{11}=0.0101, C_{17}=0.0036, C_{23}=0.0018, C_{29}=0.0010$,其他 C_k 均为零.材料参数的取值与上文中不规则孔完全相同,故特征方程的根也相同. R 的值仍为 1.0.将各向同性材料与上述 2 种正交各向异性材料进行对比,图 5 和图 6 分别用虚线绘出了沿 x 轴或 y 轴荷载作用下($\sigma_x^\infty=\sigma, \sigma_y^\infty=\sigma$)正六角形孔的孔边切向应力与外荷载的比值 σ_θ/σ 的分布.

分析图 5 和图 6 可以看出:各向同性材料的孔边最大切向应力发生在尖点处,如图 5a 中 $\theta=60.0^\circ$ 的 B 点和图 6a 中 $\theta=0^\circ$ 的 A 点.但是对于正交各向异性材料,孔边产生最大切向应力的位置既可能是在尖点处,如图 6b 的尖点 A 处,也可能是在尖点的附近点,如图 5b 中尖点 B 附近 $\theta=62.0^\circ$ 的点、图 5c 中尖点 B 附近 $\theta=59.5^\circ$ 的点、图 6c 中尖点 A 附近 $\theta=2.5^\circ$ 的点.除此之外,分析图 6 还可以看出,当荷

载作用方向与孔边尖点 A 的指向(x 轴方向)垂直时,3 种材料最大切向应力都发生在孔边 A 处尖点或者其临近的孔边点.这与图 3 中不规则孔形的规律完全相同.

将图 2 和图 3 中不规则孔形的孔边应力分布与图 5、图 6 中正六角形孔的结果进行对比分析发现:当 3 种材料结构的平板受沿 y 轴方向的单向拉伸时,在 y 轴与孔边界的交点及其附近的孔边区域,切向应力均为压应力,尤其对于 2 种正交各向异性板,在 y 轴与孔边界的交点,即 $\theta=90.0^\circ$ 的点,切向应力值都是 $-\sigma$;同样,当荷载是沿 x 轴方向拉伸时,在 x 轴与孔边界的交点及其附近的孔边区域,切向应力也均为压应力,而 2 种正交各向异性板中 x 轴与孔边界的交点($\theta=0^\circ$ 的点)切向应力值也都是 $-\sigma$.

2.4 孔边最大切向应力点位置的确定

为了进一步研究正交各向异性板在 y 方向荷载 $\sigma_y^\infty=\sigma$ 单独作用下孔边最大切向应力发生的位置,针对上述 2 种孔形,计算其他纤维角度工况下孔边

的切向应力与外荷载的比值 σ_θ/σ 。不同纤维角度条件下,孔边产生最大切向应力的位置(θ 角)及其最大

应力值 $(\sigma_\theta/\sigma)_{\max}$ 与尖点($\theta=0^\circ$)处应力值的对比见表 1。

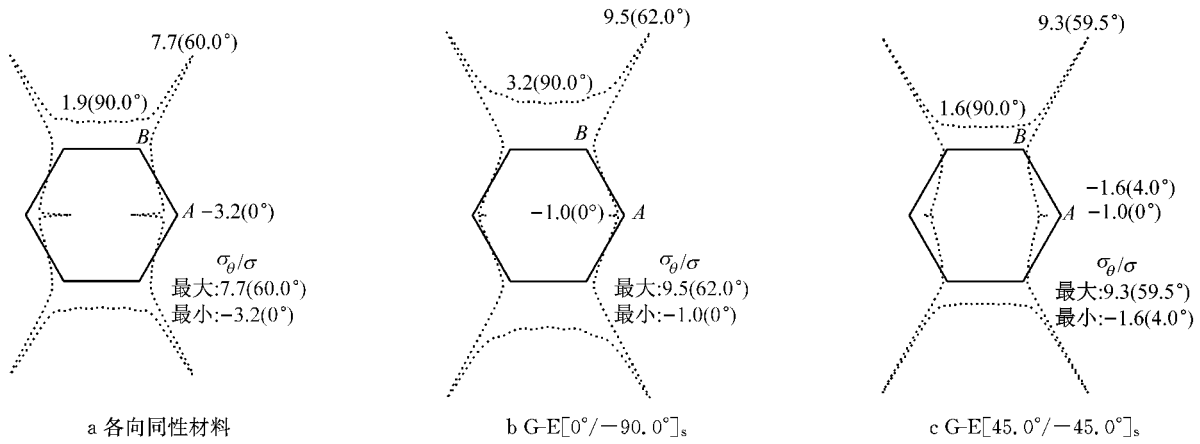


图 5 带有正六角形孔的 3 种材料结构在 $\sigma_x^\infty = \sigma$ 单独作用下的孔边切向应力分布

Fig.5 Distribution of normalized tangential stresses for three kinds of plates with hexagon hole under uniaxial loading $\sigma_x^\infty = \sigma$

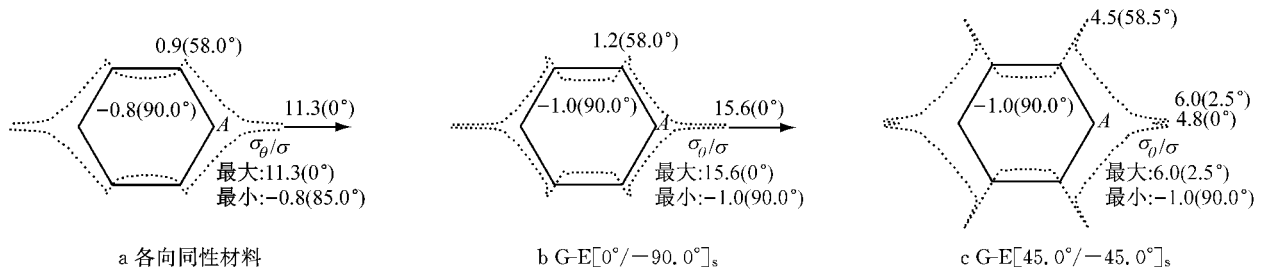


图 6 带有正六角形孔的 3 种材料结构在 $\sigma_y^\infty = \sigma$ 单独作用下的孔边切向应力分布

Fig.6 Distribution of normalized tangential stresses for three kinds of plates with hexagon hole under uniaxial loading $\sigma_y^\infty = \sigma$

表 1 纤维角度不同时整体坐标系下的复根 μ_1, μ_2 以及孔边最大切向应力 $(\sigma_\theta/\sigma)_{\max}$ 与尖点处($\theta=0^\circ$)应力的对比

Tab.1 The complex roots μ_1, μ_2 in the global coordinates and the comparison of the maximum normalized tangential stress σ_θ/σ with the stress in the sharp corner ($\theta=0^\circ$) for different fiber orientation angles

纤维角度	μ_1	μ_2	不规则孔			正六角形孔		
			0°时 (σ_θ/σ)	$(\sigma_\theta/\sigma)_{\max}$	$\theta/(^\circ)$	0°时 σ_θ/σ	$(\sigma_\theta/\sigma)_{\max}$	$\theta/(^\circ)$
$[0^\circ/-90.0^\circ]_s$	3.640 4i	0.274 7i	108.9	108.9	0	15.6	15.6	0
$[5.0^\circ/-85.0^\circ]_s$	-0.973 2+3.330 4i	0.080 8+0.276 6i	100.5	108.1	0.04	14.4	15.4	0.27
$[10.0^\circ/-80.0^\circ]_s$	-1.530 0+2.658 3i	0.162 6+0.282 6i	82.1	105.8	0.09	11.9	15.0	0.55
$[15.0^\circ/-75.0^\circ]_s$	-1.682 3+1.999 4i	0.246 4+0.292 8i	64.2	102.0	0.13	9.5	14.2	0.83
$[20.0^\circ/-70.0^\circ]_s$	-1.618 3+1.496 1i	0.333 2+0.308 0i	50.7	96.9	0.18	7.7	13.3	1.14
$[25.0^\circ/-65.0^\circ]_s$	-1.471 9+1.141 8i	0.424 2+0.329 0i	41.6	90.6	0.23	6.5	12.0	1.48
$[30.0^\circ/-60.0^\circ]_s$	-1.305 8+0.896 0i	0.520 7+0.357 3i	35.6	83.3	0.28	5.7	10.6	1.84
$[35.0^\circ/-55.0^\circ]_s$	-1.144 3+0.723 6i	0.624 3+0.394 8i	31.8	75.2	0.34	5.2	9.1	2.20
$[40.0^\circ/-50.0^\circ]_s$	-0.995 2+0.600 5i	0.736 7+0.444 5i	29.8	66.5	0.40	4.9	7.5	2.47
$[45.0^\circ/-45.0^\circ]_s$	-0.859 7+0.510 9i	0.859 7+0.510 9i	29.2	57.0	0.50	4.8	6.0	2.50

图 7 给出了纤维的旋转方向和其中一种工况 ($[10.0^\circ/-80.0^\circ]_s$) 的示意图。由于孔形和荷载的对称性,纤维在 $[0^\circ/-90.0^\circ]_s$ 和 $[45.0^\circ/-45.0^\circ]_s$ 范围内的角度变化包含了纤维发生旋转时所有可能的布置情况,而不同纤维角度的布置对应的整体坐标系下特征方程的根 μ_1, μ_2 可以根据式(14)求出,结

果见表 1。

由表 1 可见:对于 2 种孔形,仅当 y 方向作用有荷载时,纤维角度按 $[0^\circ/90.0^\circ]_s$ 布置,最大的切向应力产生在尖点 $A(\theta=0^\circ)$;但当纤维角度稍微发生旋转时,最大切向应力的发生位置逐渐偏离 A 点,其中,不规则形状孔的偏离幅度较小,最远达到 $\theta=$

0.5°的点,而正六角形孔的偏离幅度最远达到 $\theta=2.5^\circ$ 的点;除此之外,随着纤维角度从 $[0^\circ/90.0^\circ]$ 向 $[45.0^\circ/-45.0^\circ]$ 旋转,2种孔形对应的最大切向应力值逐渐减小.无论是不规则形状孔还是正六角形孔,正交各向异性板纤维角度的改变对孔边以及孔外域的切向应力集中都会产生很大的影响,在以后的研究中,可以针对纤维角度进行优化设计的研究,以使孔边和孔外域都获得较小的应力集中.

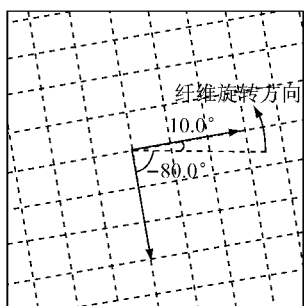


图7 纤维角度按 $[10.0^\circ/-80.0^\circ]$ 布置的示意图

Fig.7 Sketch of the fiber orientation angles at $[10.0^\circ/-80.0^\circ]$.

3 结论

(1) 在单向均布荷载作用下,各向同性材料孔边产生最大切向应力的位置是尖点处,而正交各向异性材料则不一定.

(2) 当单向均布荷载的作用方向与孔边尖点的指向垂直时,纤维角度按 $[0^\circ/-90.0^\circ]$ 布置会使最大的切向应力产生在尖点处($\theta=0^\circ$);但是随着纤维角度的旋转,最大应力点的位置逐渐偏离尖点,最大切向应力的数值也逐渐减小.

(3) 各向同性材料产生最大切向应力的位置在孔边,而正交各向异性材料则不一定,当单向拉伸荷载的方向与尖点指向垂直时,最大切向应力可能是在孔边(纤维按 $[0^\circ/-90.0^\circ]$ 角度布置),也可能是在孔外部的临近区域(纤维按 $[45.0^\circ/-45.0^\circ]$ 角度布置).

(4) 正交各向异性板切向应力的集中程度也与材料的纤维方向有很大的关系,通过调整材料纤维的方向可以获得孔边或者孔外区域较小的应力集中.

(5) 当无限平板中均布的单向拉伸荷载 σ 沿某坐标轴方向作用时,该坐标轴与孔边界的交点及其附近的孔边区域,切向应力均为压应力.尤其对于正交各向异性板,在该坐标轴与孔边界的交点,切向应

力均为 $-\sigma$.

参考文献:

- [1] LEKHNITSKII S G. Anisotropic plates [M]. New York: Gordon and Breach, 1968.
- [2] LEKHNITSKII S G. Theory of elasticity of an anisotropic body [M]. Moscow: Mir Publishers, 1981.
- [3] DAOUST J, HOA S V. An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes[J]. Composite Structures, 1991, 19(2): 107.
- [4] UKADGAONKER V G, RAO D K N. Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates [J]. Composite Structures, 1999, 45(3):171.
- [5] SHARMA D S. Stress distribution around circular/elliptical/triangular holes in infinite composite plate[J]. Engineering Letters, 2012, 20(1): EL_20_1_01.
- [6] REZAEPAZHAND J, JAFARI M. Stress analysis of composite plates with non-circular cutout[J]. Key Engineering Materials, 2008, 385-387:365.
- [7] RAO D K N, BABU M R, REDDY K R N, et al. Stress around square and rectangular cutouts in symmetric laminates[J]. Composite Structures, 2010, 92(12):2845.
- [8] SHARMA D S. Stresses around polygonal hole in an infinite laminated composite plate[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2015, 54:44.
- [9] 李成, 郑艳萍. 不同孔口形状对含孔复合材料板孔边应力状态影响的研究[J]. 工程力学, 2007, 24(10):19.
LI Cheng, ZHENG Yanping. Influence of different orifice figure on hole-edge stress of composite material plate with hole [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(10): 19.
- [10] PATEL N P, SHARMA D S. On the stress concentration around a polygonal cut-out of complex geometry in an infinite orthotropic plate[J]. Composite Structures, 2017, 179: 415.
- [11] UKADGAONKER V G, KAKHANDKI V. Stress analysis for an orthotropic plate with an irregular shaped hole for different in-plane loading conditions—Part 1[J]. Composite Structures, 2005, 70(3):255.
- [12] LU A Z, ZHANG N, ZHANG X L, et al. Analytic method of stress analysis for an orthotropic rock mass with an arbitrary-shaped tunnel [J]. International Journal of Geomechanics, 2015, 15(4): 04014068.
- [13] 吕爱钟, 张路青. 地下隧洞力学分析的复变函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
LÜ Aizhong, ZHANG Luqing. Complex function method on mechanical analysis of underground tunnel [M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [14] 萨文. 孔附近的应力集中[M]. 卢鼎霍, 译. 北京: 科学出版社, 1958.
SAVIN G N. Stress concentration around holes[M]. Translated by LU Dinghuo. Beijing: Science Press, 1958.
- [15] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994.
CHEN Ziyin. Analytical method of rock mechanics analysis [M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House, 1994.