

# 高度非线性弹塑性模型的改进显式算法数值实现

耿大将<sup>1</sup>, 郭培军<sup>1,2</sup>, 周顺华<sup>1</sup>

(1. 同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804; 2. 麦克马斯特大学 土木工程系, 汉密尔顿 L8S4L7)

**摘要:** 当采用传统的全显式算法对高度非线性的弹塑性本构模型进行数值实现过程中, 存在计算效率低、误差积累、精度较低的缺点。为提高计算效率和改善计算精度, 采用四阶的 Dormand and Prince Runge-Kutta 法代替传统的全显式算法中的向前 Euler 法, 并结合切平面算法形成了改进显式算法。以考虑土体结构性的 SANICLAY 模型为例, 对传统的全显式算法、改进显式算法和隐式算法在计算收敛性、效率和精度方面进行对比。将改进显式算法用于隧道开挖工程多单元计算中。结果表明, 与隐式算法相比, 传统的全显式算法的计算精度和计算效率均比较低, 改进显式算法计算效率和计算精度均比传统的全显式算法高很多。

**关键词:** 结构性软土; 高度非线性; 弹塑性模型; 改进显式算法; 数值实现

中图分类号: TU443

文献标志码: A

Using the highly nonlinear SANICLAY model for structured clay as an example, the convergence, the computational efficiency, and the accuracy of three algorithms, namely the conventional explicit algorithm, the improved-explicit algorithm, and the implicit algorithm, are compared via numerical simulations of single element tests. Finally, the improved-explicit algorithm is applied to the multi-element calculation of tunnel excavation. Compared with the implicit algorithm, the conventional explicit algorithm has a lower computational efficiency and a higher accumulative error. The improved-explicit algorithm can greatly improve the computational efficiency and accuracy.

**Key words:** structured clays; highly nonlinearity; elasto-plastic constitutive model; improved-explicit algorithm; numerical implementation

## Improved Explicit Numerical Integration of a Highly Nonlinear Elasto-Plastic Constitutive Model

GENG Dajiang<sup>1</sup>, GUO Peijun<sup>1,2</sup>, ZHOU Shunhua<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Department of Civil Engineering, McMaster University, Hamilton L8S4L7, Canada)

**Abstract:** When implementing a highly nonlinear stress-strain model to solve boundary-valued problems, one of the major challenges is how to reduce the accumulative error and to maintain the effectiveness of the numerical integration. In general, the conventional explicit algorithm tends to have a lower computational efficiency and a higher accumulative error. In order to deal with these challenges, this paper proposes an improved-explicit algorithm combining with the cutting-plane method, in which the Dormand and Prince Runge-Kutta method is used instead of the forward Euler.

天然形成的结构性软土与重塑软土有不同的物理力学性质, 天然软土的结构性会随土体变形的发展逐渐散失, 土体强度会逐渐降低, 甚至会出现应变软化效应, 而且天然结构性软土一般是各向异性的<sup>[1-3]</sup>。因此, 在对处于天然结构性软土中的工程行为进行数值模拟时用重塑软土的本构模型是不尽合理的<sup>[4-6]</sup>, 应该用能够反映软土的结构性的本构模型。鉴于此, 国内外众多学者和研究人员提出了各种不同的描述原状结构性软黏土力学性质的本构模型<sup>[7-11]</sup>。为了更好地反映原状结构性软土的力学特性, 一般情况下, 这些模型有很强的非线性性。模型建立完成后, 必须先对其进行数值算法实现, 才能将其用于工程数值计算中。因此, 数值实现是从模型理论到工程应用的关键环节。对于高度非线性的弹塑性本构模型, 数值实现的难度比较大。本文以考虑软土结构性的 SANICLAY 模型<sup>[7]</sup>为例, 对高度非线性弹塑性本构模型的显式算法实现展开探讨。

收稿日期: 2017-09-04

基金项目: 国家重点研发计划(2017YFB1201204)

第一作者: 耿大将(1988—), 男, 博士生, 主要研究方向为结构性软土的本构模型及其数值实现。

E-mail: 1410704@tongji.edu.cn

通讯作者: 郭培军(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为土体本构及数值模型。

E-mail: guop@mcmaster.ca



扫码  
查看  
作者  
独家  
介绍

常微分方程组的求解方法一般可分为隐式算法与显式算法两大类. 与之对应的弹塑性模型的数值实现方法也可以分为隐式算法与显式算法两大类. 当采用隐式算法时, 在塑性修正步一般需要采用 Newton 迭代法求解回退映射非线性方程组. 对于高度非线性的弹塑性本构模型, Newton 迭代法所对应的 Jacobian 矩阵很难求出, 即便求出形式也较复杂. 而且 Newton 迭代法需要保证 Jacobian 矩阵是可逆的, 否则无法进行求解, 对于高度非线性的本构模型, 这点也是很难保证的. 例如, 对于考虑软土结构性的 SANICLAY 模型, 在应变硬化过渡到应变软化的阶段, Jacobian 矩阵不可逆. 因此, 隐式算法用于高度非线性弹塑性本构模型数值实现的难度比较大. 与隐式算法相比较, 显式算法一般不需要迭代求解复杂的非线性方程组, 因此单个增量步的计算量小, 但其计算精度低, 并且存在误差的积累.

对于高度非线性弹塑性本构模型, 如考虑土体结构性的 SANICLAY 模型, 当采用传统的显式算法对模型进行数值实现时, 计算精度难以控制. 在求解本构方程所对应的常微分方程组时, 为了提高显式算法的计算精度, Sloan 等<sup>[12]</sup>、Cabot 等<sup>[13]</sup>、Gonzalez 等<sup>[14]</sup>将向前 Euler 法与多步法结合使用. 多步法本质上是将一个增量步分为多个增量步进行求解, 实际上是减小了增量步步长, 这样必然会大幅降低计算效率, 而且多步法并不能完全消除传统的全显式算法所具有的误差积累和精度较低的缺点. 在实际应用中, 为了提高计算精度, 往往会将增量步步长取得很小, 这无疑会降低计算效率.

采用全显式算法进行高度非线性弹塑性本构模型的数值实现时, 为提高计算效率和计算精度, 本文采用四阶 Dormand and Prince Runge-Kutta 法<sup>[15]</sup> (DPRK 法) 代替传统的全显式算法中的向前 Euler 法, 并且与切平面法<sup>[16-17]</sup>相结合, 形成了改进显式算法. 最后, 对传统的全显式算法、改进显式算法和隐式算法在计算收敛性、计算效率和计算精度方面进行了对比, 得出了一些有益的结论.

## 1 SANICLAY 模型简介

在原始 SANICLAY 弹塑性本构模型<sup>[18]</sup>的基础上, Taiebat 等<sup>[7]</sup>引入了表征土体强度和旋转硬化的内变量, 以考虑随着变形的发展, 结构性的逐渐散失, 强度的逐渐降低和各向异性的演化. 该模型的屈服函数和塑性势函数是不同的, 具体如下.

### 1.1 弹性关系

模型的弹性关系依赖于球应力  $p$  和孔隙比  $e$ , 具体为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (1)$$

$$\mathbf{C} = \lambda' \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta} + 2G \mathbf{I} \quad (2)$$

式中:  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 、 $\mathbf{C}$  与  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$  分别为应力增量张量、弹性刚度和应变增量弹性部分;

$$\lambda' = K - \frac{2}{3}G, \quad K = \frac{1+e}{k}p,$$

$$G = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)} \frac{1+e}{k}p$$

$\lambda'$  表示拉梅常数;  $\boldsymbol{\delta}$  与  $\mathbf{I}$  分别表示二阶和四阶等同张量;  $K$ 、 $G$  分别表示体变模量和剪切模量;  $\mu$  表示泊松比;  $k$  表示  $e-\ln p$  空间内回弹线的斜率.

### 1.2 塑性势函数及流动法则

塑性势函数

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}, S_i, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{3}{2}(s - p\boldsymbol{\alpha}) : (s - p\boldsymbol{\alpha}) - \left(M^{*2} - \frac{3}{2}\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha}\right)p(p_a - p) \quad (3)$$

式中:  $s$  表示偏应力;  $\boldsymbol{\alpha}$  为表征塑性势函数旋转的张量;  $p_a$  确保塑性势面过当前应力点;  $M^* = S_i M$ ;  $S_i$  表征摩擦结构性;  $M$  通过应力罗德角  $\theta_a$  在拉压临界状态线的斜率  $M_e$  和  $M_c$  间插值确定

$$M = \Theta(\theta_a)M_c = \frac{2m}{(1+m) - (1-m)\cos(3\theta_a)}M_c$$

其中

$$m = \frac{M_e}{M_c}, \quad \cos(3\theta_a) = \sqrt{6} \operatorname{tr}(\boldsymbol{n}_a^3)$$

$$\boldsymbol{n}_a = \frac{\boldsymbol{\gamma}/\chi_a - \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{(\boldsymbol{\gamma}/\chi_a - \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\gamma}/\chi_a - \boldsymbol{\alpha})}}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{s}{p}$$

$\chi_a$  为模型参数. 将塑性势函数  $\psi$  对应力  $\boldsymbol{\sigma}$  求导可得塑性流动方向  $\boldsymbol{r} = \partial\psi/\partial\boldsymbol{\sigma}$ .

### 1.3 屈服函数

屈服函数

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, S_i, S_f, p_0, \boldsymbol{\beta}) = \frac{3}{2}(s - p\boldsymbol{\beta}) : (s - p\boldsymbol{\beta}) - \left(N^{*2} - \frac{3}{2}\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta}\right)p(p_0^* - p) \quad (4)$$

式中:  $\boldsymbol{\beta}$  表示屈服函数旋转的二阶张量;  $p_0^* = S_i p_0$ ;  $N^* = S_f N$ ;  $p_0$  为各向同性硬化内变量;  $S_i$  表征各向同性结构性;  $S_i$  和  $S_f$  均为不小于 1 的内变量, 随着土体结构性的散失, 其值逐渐趋近于 1; 与  $M$  相类似,  $N$  通过应力罗德角  $\theta_\beta$  在  $N_e$  和  $N_c$  之间通过插值确定

$$N = \Theta(\theta_\beta)N_c = \frac{2n'}{(1+n') - (1-n')\cos(3\theta_\beta)}N_c$$

$$n' = \frac{N_e}{N_c}, \quad \cos(3\theta_\beta) = \sqrt{6} \operatorname{tr}(n_\beta^3) \quad (10)$$

$$n_\beta = \frac{\gamma/\chi_\beta - \beta}{\sqrt{(\gamma/\chi_\beta - \beta) : (\gamma/\chi_\beta - \beta)}}$$

$\chi_\beta$  为模型参数. 如图 1 所示, 在  $q-p$  平面内(其中  $q = \sqrt{\frac{3}{2}} s : s$ , 表示广义剪应力), 屈服函数和塑性势函数为倾斜的椭圆. 将屈服函数  $\Phi$  对应力  $\sigma$  求导可得屈服方向  $n = \partial\Phi/\partial\sigma$ .

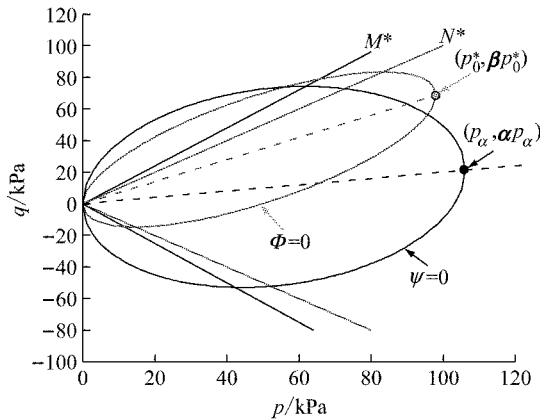


图 1 屈服函数与塑性势函数

Fig. 1 Yield function and plastic potential function

#### 1.4 硬化规则

模型有  $S_i, S_f, p_0, \alpha$  和  $\beta$  共 5 个内变量, 对应的演化规则为

$$\dot{S}_i = -k_i \left( \frac{1+e}{\lambda-k} \right) (S_i - 1) \dot{\epsilon}_{pd} = \dot{\Lambda} \bar{S}_i \quad (5)$$

$$\dot{S}_f = -k_f \left( \frac{1+e}{\lambda-k} \right) (S_f - 1) \dot{\epsilon}_{pd} = \dot{\Lambda} \bar{S}_f \quad (6)$$

$$\dot{p}_0 = \left( \frac{1+e}{\lambda-k} \right) p_0 \dot{\epsilon}_{pv} = \dot{\Lambda} \bar{p} \quad (7)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\Lambda} \bar{\alpha} \quad (8)$$

$$\dot{\beta} = \dot{\Lambda} \bar{\beta} \quad (9)$$

对应变增量塑性部分  $\dot{\epsilon}_p$  实施加法分解,  $\dot{\epsilon}_p = \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{pv} \delta + \dot{\epsilon}_p$ , 可得塑性体变增量  $\dot{\epsilon}_{pv}$  与塑性偏应变增量  $\dot{\epsilon}_p$ ,  $\dot{\epsilon}_{pd} = \sqrt{(1-A)(\dot{\epsilon}_{pv})^2 + A(\dot{\epsilon}_{pq})^2}$ ,  $\dot{\epsilon}_{pq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p}$ ;  $\lambda$  表示  $e-\ln p$  空间内压缩线的斜率;  $A, k_i$  和  $k_f$  均为模型参数;  $\dot{\Lambda}$  表示一致性参数;  $\bar{S}_i, \bar{S}_f, \bar{p}_0, \bar{\alpha}$  及  $\bar{\beta}$  可以参考文献[7]的模型理论进行推导得出.

#### 1.5 一致性条件

与屈服函数相应的一致性条件

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial\Phi}{\partial S_i} \dot{S}_i + \frac{\partial\Phi}{\partial S_f} \dot{S}_f +$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_0} \dot{p}_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial \beta} : \dot{\beta} = 0$$

将硬化规则式(5)~(9)代入可以得到一致性参数

$$\dot{\Lambda} = \frac{n : C : \dot{\epsilon}}{n : C : r + K_p} \quad (11)$$

其中, 塑性模量

$$K_p = - \left( \frac{\partial\Phi}{\partial S_i} \bar{S}_i + \frac{\partial\Phi}{\partial S_f} \bar{S}_f + \frac{\partial\Phi}{\partial p_0} \bar{p}_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial \beta} : \bar{\beta} \right) \quad (12)$$

## 2 显式算法数值实现

考虑土体结构性的 SANICLAY 模型考虑的因素较全面, 使得模型比较复杂, 导致模型具有很强的非线性, 数值实现的难度较大. 结合本文第一部分可以看出, 在采用显式算法对考虑土体结构性的 SANICLAY 模型进行数值实现的过程中, 可能导致计算精度差的因素包括: ①弹性关系依赖于球应力和孔隙比; ②屈服函数和塑性势函数的曲率较大; ③模型考虑了各向异性——旋转硬化; ④硬化内变量较多, 且硬化规则具有较高的非线性. 总之, 一般情况下, 会导致本构模型的非线性程度增加的因素都会导致显式算法的精度降低.

### 2.1 传统的显式算法

弹塑性本构模型的显式算法数值实现主要是进行状态变量的更新. 考虑土体结构性的 SANICLAY 模型的状态变量主要包括应力  $\sigma$ 、应变  $\epsilon$ 、弹性应变  $\epsilon_e$ 、塑性应变  $\epsilon_p$ 、孔隙比  $e$ 、表征各向同性结构性的内变量  $S_i$ 、表征摩擦结构性的内变量  $S_f$ 、各向同性硬化内变量  $p_0$ 、塑性势函数和屈服函数中表征旋转硬化的内变量  $\alpha$  与  $\beta$ .

弹塑性本构模型状态变量的更新一般采用应变驱动模式, 所对应的基本问题为: 给定满足本构模型的状态变量的初值  $\sigma(t_0), e(t_0), S_i(t_0), S_f(t_0), p_0(t_0), \alpha(t_0), \beta(t_0)$  以及应变历史  $\epsilon(t), t \in [t_0, T]$ , 求  $\sigma(t), e(t), S_i(t), S_f(t), p_0(t), \alpha(t)$  和  $\beta(t)$ , 使其满足如下本构方程:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = C_{ep}(t) : \dot{\epsilon}(t) = C(t) : (\dot{\epsilon}(t) - \dot{\Lambda}(t)r(t)) \\ \dot{\xi}(t) = \dot{\Lambda}(t)\bar{\xi}(t) \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $\xi = (S_i, S_f, p_0, \alpha, \beta)^T$  及  $\bar{\xi} = (\bar{S}_i, \bar{S}_f, \bar{p}_0, \bar{\alpha}, \bar{\beta})^T$  分别表示硬化内变量和对应的演化方向. 由此, 状态变量的更新问题转化为由式(13)所组成的常微分方程组的求解问题, 可以采用各种求解常微分方程组

的方法求解。

当采用向前 Euler 对方程(13)进行离散可以得到,在第  $n+1$  个增量步对应状态变量的更新方程为

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_n + C_{ep}(\sigma_n, \xi_n) : \Delta \varepsilon_{n+1} \\ \xi_{n+1} = \xi_n + \Delta \Lambda(\sigma_n, \xi_n) \bar{\xi}(\sigma_n, \xi_n) \end{cases} \quad (14)$$

式(14)即为传统的全显式算法所对应状态变量的更新方程。

## 2.2 改进显式算法

考虑到传统的全显式算法所对应的向前 Euler 法只有一阶精度,为提高显式算法的计算效率,本文用四阶 DPRK 法代替向前 Euler 法,对方程(13)进行离散,可以得到第  $n+1$  个增量步对应状态变量的更新方程变为

$$\begin{cases} \sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{31}{540} \Delta \sigma_1 + \frac{190}{297} \Delta \sigma_3 - \frac{145}{108} \Delta \sigma_4 + \\ \quad \frac{351}{220} \Delta \sigma_5 + \frac{1}{20} \Delta \sigma_6 \\ \xi_{n+1} = \xi_n + \frac{31}{540} \Delta \xi_1 + \frac{190}{297} \Delta \xi_3 - \frac{145}{108} \Delta \xi_4 + \\ \quad \frac{351}{220} \Delta \xi_5 + \frac{1}{20} \Delta \xi_6 \end{cases} \quad (15)$$

其中,

$$\begin{cases} \Delta \sigma_i = C_{ep}(\sigma_{ni}, \xi_{ni}, \Delta \varepsilon_{n+1}) : \Delta \varepsilon_{n+1} \\ \Delta \xi_i = \Delta \Lambda(\sigma_{ni}, \xi_{ni}, \Delta \varepsilon_{n+1}) \bar{\xi}(\sigma_{ni}, \xi_{ni}) \\ i = 1, 2, \dots, 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{n1} = \sigma_n \\ \xi_{n1} = \xi_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{n2} = \sigma_n + \frac{1}{5} \Delta \sigma_1 \\ \xi_{n2} = \xi_n + \frac{1}{5} \Delta \xi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{n3} = \sigma_n + \frac{3}{40} \Delta \sigma_1 + \frac{9}{40} \Delta \sigma_2 \\ \xi_{n3} = \xi_n + \frac{3}{40} \Delta \xi_1 + \frac{9}{40} \Delta \xi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{n4} = \sigma_n + \frac{3}{10} \Delta \sigma_1 - \frac{9}{10} \Delta \sigma_2 + \frac{6}{5} \Delta \sigma_3 \\ \xi_{n4} = \xi_n + \frac{3}{10} \Delta \xi_1 - \frac{9}{10} \Delta \xi_2 + \frac{6}{5} \Delta \xi_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{n5} = \sigma_n + \frac{226}{729} \Delta \sigma_1 - \frac{25}{27} \Delta \sigma_2 + \frac{880}{729} \Delta \sigma_3 + \frac{55}{729} \Delta \sigma_4 \\ \xi_{n5} = \xi_n + \frac{226}{729} \Delta \xi_1 - \frac{25}{27} \Delta \xi_2 + \frac{880}{729} \Delta \xi_3 + \frac{55}{729} \Delta \xi_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{n6} = \sigma_n - \frac{181}{270} \Delta \sigma_1 + \frac{5}{2} \Delta \sigma_2 - \frac{226}{297} \Delta \sigma_3 - \frac{91}{27} \Delta \sigma_4 + \frac{189}{55} \Delta \sigma_5 \\ \xi_{n6} = \xi_n - \frac{181}{270} \Delta \xi_1 + \frac{5}{2} \Delta \xi_2 - \frac{226}{297} \Delta \xi_3 - \frac{91}{27} \Delta \xi_4 + \frac{189}{55} \Delta \xi_5 \end{cases}$$

式中:  $\Delta \sigma_i$ 、 $\Delta \xi_i$  分别为应力和硬化内变量的第  $i$  次修正量,并非表示应力增量  $\Delta \sigma$  和内变量增量  $\Delta \xi$  的分量;  $\sigma_{ni}$ 、 $\xi_{ni}$  分别为计算过程中所采用的修正后的应力和内变量,并非表示应力  $\sigma_n$  和内变量  $\xi_n$  的分量。

理论上说,显式算法经过以上改进后计算效率可以得到提高,但是其所具有的误差积累和精度较低的缺点仍无法消除,这在后文中的分析可以得到说明。造成显式算法精度低和误差积累的原因可以从显式算法的原理得到解释。显式算法是基于已知的状态变量的值直接外推下一增量步的状态变量的值,在外推过程中并没有对下一增量步的状态变量进行有效的限制。例如,外推得出的下一增量步的状态变量不一定能满足屈服函数的一致性条件。因此,通过显式算法更新后的状态变量会存在误差。同时,在本增量步的状态变量存在误差的情况下,显式算法会直接用本增量步的有误差的状态变量外推下一增量步的状态变量,显然这样会造成误差的积累。因此,提高显式算法精度的关键就在于提高每个增量步的计算精度,以减小误差的积累和传播。

在第  $n+1$  个增量步,采用式(15)所对应的改进显式算法进行状态变量的更新,更新后的状态变量会存在误差。如图 2 所示,根据更新后的状态变量得出的屈服函数值  $\Phi_{n+1} > 0$ ,这与传统的弹塑性理论是相违背的,因此需要对更新后的状态变量进行修正。本文尝试采用切平面算法对更新后的状态变量进行修正,以提高显式算法的计算精度。具体采用的修正方程为

$$\begin{aligned} \Delta \Lambda_{n+1}^{(k-1)} &= \frac{\Phi_{n+1}^{(k-1)}}{\mathbf{n}_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{C}_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{r}_{n+1}^{(k-1)} + K_D^{(k-1)}} \\ \sigma_{n+1}^{(k)} &= \sigma_{n+1}^{(k-1)} - \Delta \Lambda_{n+1}^{(k-1)} \mathbf{C}_{n+1}^{(k-1)} : \mathbf{r}_{n+1}^{(k-1)} \\ \xi_{n+1}^{(k)} &= \xi_{n+1}^{(k-1)} + \Delta \Lambda_{n+1}^{(k-1)} \bar{\xi}_{n+1}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (16)$$

其中,上标  $(k-1)$  和  $(k)$  表示修正次数。

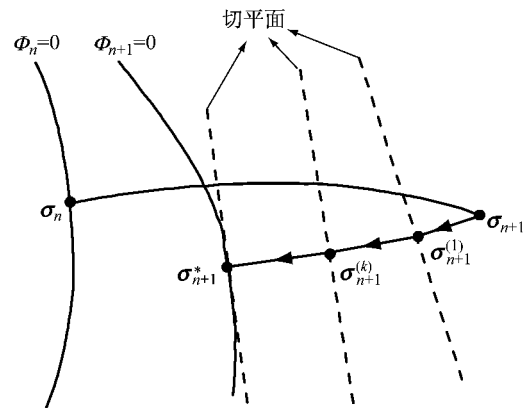


图 2 切平面算法原理

Fig. 2 Principle of the cutting-plane method

综合本节内容可以看出,改进显式算法对传统的全显式算法做了计算效率和计算精度两方面的改进.如图 3 所示,为提高计算效率而引入了 DPRK 法,为改善计算精度对更新后的状态变量采用切平面算法进行了修正.

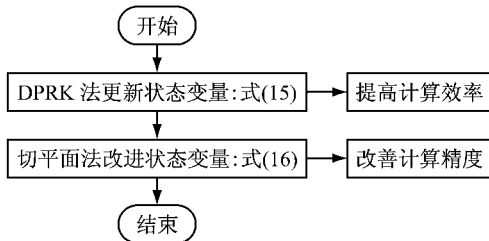


图 3 改进显式算法框图

Fig. 3 Improved-explicit algorithm

### 3 不同算法对比

为明确文中的改进显式算法的计算精度和计算效率,同时也为后续研究工作中采用哪种算法提出建议,笔者将显式算法、改进显式算法和隐式算法进行对比.

本文进行单个单元的计算分析以模拟原状土的三轴不排水压缩试验.具体在数值计算中采用的是 8 节点 3 维实体单元.在考虑软土结构性的 SANICLAY 模型中,考虑土体结构性的内变量主要包括各向同性结构性内变量  $S_i$  和摩擦结构性内变量  $S_r$ ,具体的模型参数取值参考文献[7].轴向初始应力  $\sigma_a = 74.667$  kPa,周向初始应力  $\sigma_r = 37.667$  kPa.采用应变控制式比例加载  $\epsilon_a/\epsilon_r = 2/(-1)$ ,加载至轴向应变  $\epsilon_a = 0.150$ .在具体计算中,每种算法都分别考虑了增量步长为  $10^{-1}$ 、 $10^{-2}$ 、 $10^{-3}$ 、 $10^{-4}$  的情况.

计算结果及对比如表 1 所示.表 1 中,传统显式算法指的是与传统的向前 Euler 法相对应的显式算法,改进显式算法 1 指的是用四阶的 DPRK 法代替向前 Euler 法所得出的显式算法;改进显式算法 2 指的是用四阶的 DPRK 法代替向前 Euler 法,然后再采用切平面算法进行修正后所得出的显式算法.改进显式算法 1 和改进显式算法 2 的主要区别在于是否采用切平面算法进行精度改善.表中的收敛性可以直接反映出相应算法的收敛性,计算时间可以间接反映计算效率的高低,通过对比  $q-\epsilon_q$  曲线可以反映算法的计算精度.当增量步长为  $10^{-1}$  时,传统显式算法、改进显式算法 1、改进显式算法 2 会得出错误的结果,而隐式算法会不收敛.

表 1 计算结果对比

算法	增量步长	收敛性	计算时间 $t/s$	$q/kPa$	
				终值	峰值
传统显式算法	$10^{-1}$	收敛	0.23	2 042.21	2 042.21
	$10^{-2}$	收敛	2.70	69.78	68.11
	$10^{-3}$	收敛	31.60	42.02	61.53
	$10^{-4}$	收敛	397.30	41.15	60.93
改进显式算法 1	$10^{-1}$	收敛	0.26	0	301.10
	$10^{-2}$	收敛	3.40	40.97	60.81
	$10^{-3}$	收敛	38.20	41.04	60.86
	$10^{-4}$	收敛	427.80	41.05	60.87
改进显式算法 2	$10^{-1}$	收敛	0.37	0	215.44
	$10^{-2}$	收敛	3.70	33.07	60.81
	$10^{-3}$	收敛	40.60	33.03	60.86
	$10^{-4}$	收敛	438.12	33.03	60.87
隐式算法	$10^{-1}$	不收敛	—	—	—
	$10^{-2}$	不收敛	—	—	—
	$10^{-3}$	不收敛	—	—	—
	$10^{-4}$	收敛	504.30	33.21	62.38

结合图 4 和表 1 可以看出,对传统显式算法,当增量步长较大(如  $10^{-1}$  和  $10^{-2}$ )时,会得出错误的结果,只有在增量步长较小时算法才会稳定.与隐式算法相比,即使在增量步长取值很小(如  $10^{-4}$ ),计算时间很长的情况下,传统显式算法仍然存在误差积累,计算精度仍然较差.为了尽可能提高传统显式算法的计算精度,其增量步长必须取得相当小,比如小于等于  $10^{-4}$ ,对应的计算时间为 397.30 s,计算效率会很低.

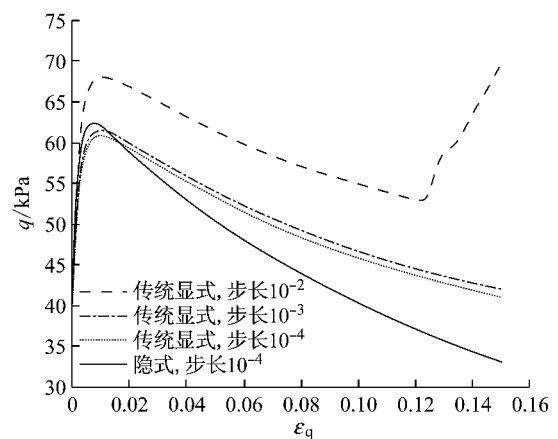


图 4 传统显式算法的计算结果

Fig. 4 Result of the conventional explicit algorithm

结合图 5 和表 1 可以看出,对只做计算效率改进的显式算法 1,当增量步长特别大(如  $10^{-1}$ )时会得出错误的结果,随着增量步长的减小,计算时间大幅增加,计算趋于收敛.当增量步长较大(如  $10^{-2}$ )和步长较小(如  $10^{-4}$ )时,计算精度差别不大.与传统显式算法相比,当增量步长相同时,改进显式

算法 1 的计算效率要稍低,这是因为与改进显式算法 1 相对应的是 DPRK 法,而与传统显式算法相对应的是向前 Euler 法,向前 Euler 法显然比 DPRK 法计算量要小.当增量步长可以发生变化时,改进显式算法 1 在增量步长较大(如  $10^{-2}$ )时即可达到与传统显式算法在增量步长较小(如  $10^{-4}$ )时相同的精度,相应的计算时间分别为 3.40 s 和 397.30 s.所以,整体上在变步长情况下,改进显式算法 1 比传统显式算法计算效率要高很多.与隐式算法相比较,改进显式算法 1 与传统显式算法的计算精度一样,都比较差.

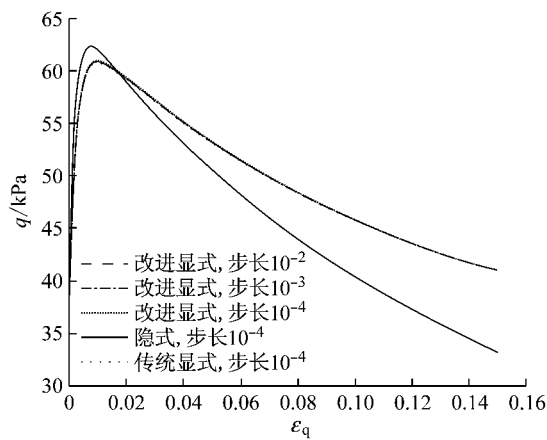


图 5 改进显式算法 1 的计算结果

Fig. 5 Result of improved-explicit algorithm 1

结合图 6 和表 1 可以看出,对做计算效率和计算精度改进的显式算法 2,当增量步长较大(如等于  $10^{-2}$ )时,即可以得到收敛而且稳定的结果.与传统显式算法和改进的显式算法 1 相比较,当增量步长相同时,改进显式算法 2 的计算效率要低,这是因为与改进显式算法 2 相对应的是 DPRK 法,并且进行了精度修正.当增量步长可以发生变化时,改进显

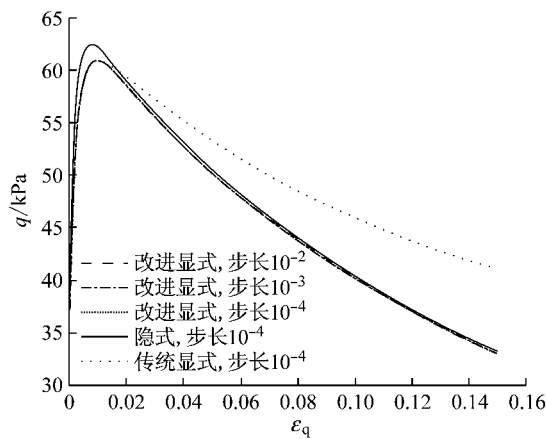


图 6 改进显式算法 2 的计算结果

Fig. 6 Result of improved-explicit algorithm 2

式算法 2 在增量步长较大(如  $10^{-2}$ )时即可达到比传统显式算法在增量步长较小(如  $10^{-4}$ )时高很多的计算精度,相应的计算时间分别为 3.70 s 和 397.30 s.所以,整体上在变步长情况下,改进显式算法 2 也比传统显式算法计算效率要高很多.与传统显式算法相比较,改进显式算法 2 的计算精度有了极大的改善,基本不存在误差的积累,但是计算精度比隐式算法仍然略差.

综合上述分析可以看出,与传统显式算法相比较,改进显式算法在计算效率和计算精度方面均有较大的改善.计算效率的提高是因为与传统显式算法对应的向前 Euler 法具有一阶精度,而与改进显式算法对应的 DPRK 法具有四阶精度.为了达到相同的计算精度,对于高阶的算法,增量步长可以取得大一些,这样总的计算时间就会降低,计算效率就会提高.计算精度的提高是因为在每个增量步都采用切平面法对更新后的状态变量进行了修正,使其较严格地满足了屈服函数,这样即可避免误差的传递和积累.

#### 4 多单元分析

本文的算法比较是建立在简单应变路径下的单个单元分析基础之上的.然而,实际工程计算往往需要的是多单元分析的结果.多单元分析中有众多材料点,基本上每个材料点的应变路径或应力路径都是较为复杂的.因此,有必要对改进显式算法在多单元分析中的适用性进行验证分析.

以某隧道开挖工程为例进行多单元计算分析,所建立的分层土的几何模型和模型参数取值如图 7 所示,所采用的 SANICLAY 模型参数取值参考文

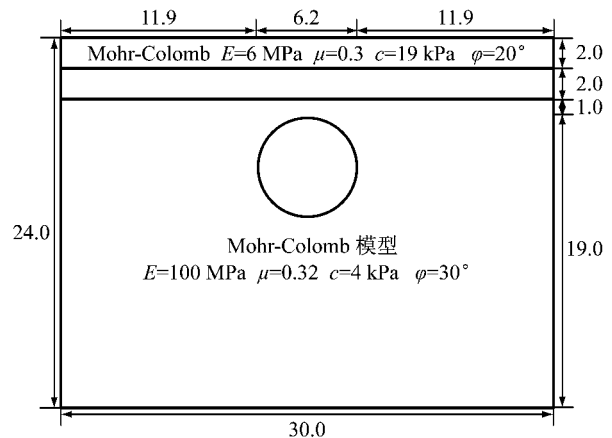


图 7 几何模型及参数取值(尺寸单位:m)

Fig. 7 Geometric model and parameter(unit:m)

献[7]. 隧道开挖采用断面收缩法模拟, 本次模拟中断面收缩率取为 8%, 最后计算结果如图 8 所示. 这说明改进显式算法不但可用于单个单元的简单应变路径计算, 而且用于工程实际中的多单元复杂应变路径或应力路径分析也是可行的.

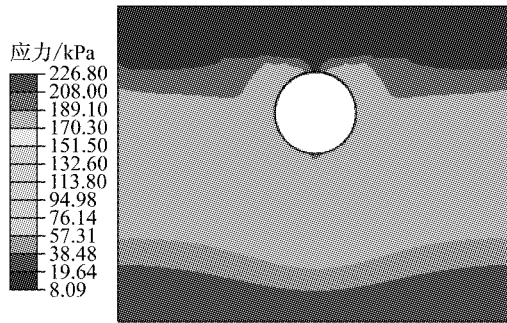


图 8 Mises 应力云图

Fig. 8 Contour of Mises stress

## 5 结论

(1) 与隐式算法相比, 传统显式算法虽然较为简单, 但其存在误差的积累, 计算精度较差, 建议尽量不使用.

(2) 与传统显式算法相比, 改进显式算法的计算效率和计算精度都得到大幅提高. 但是, 与隐式算法相比较, 其计算精度仍然略差.

(3) 改进显式算法可以有效对高度非线性弹塑性本构模型进行数值实现.

本文对高度非线性弹塑性本构模型的显式算法数值实现做了一些研究工作. 结合本文研究可以看出, 当对计算精度要求特别高时, 对高度非线性弹塑性本构模型的隐式算法实现, 尤其是在不要求 Jacobian 矩阵的情况下的数值实现, 是极具价值的研究方向.

### 参考文献:

- [1] CALLISTO L, RAMPOLLO S. Shear strength and small-strain stiffness of a natural clay under general stress conditions[J]. *Geotechnique*, 2002, 52(8):547.
- [2] 孙德安, 陈波. 结构性软土力学特性的试验研究[J]. *土木工程学报*, 2011(增刊 2):65.  
SUN Dean, CHEN Bo. Experimental study on the mechanical behavior of structural soft clay[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2011(Suppl. 2):65.
- [3] JUNG Y H, FINNO R J, CHO W. Stress-strain responses of reconstituted and natural compressible Chicago glacial clay[J]. *Engineering Geology*, 2012, 129:9.
- [4] LIU W Z, SHI M L, MIAO L C, *et al.* Constitutive modeling of the destructuration and anisotropy of natural soft clay[J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, 51:24.
- [5] PANAYIDES S, ROUAINIA M, WOOD D M. Influence of degradation of structure on the behaviour of a full-scale embankment[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2012, 49(3):344.
- [6] ROCCHI G, VACIAGO G, FONTANA M, *et al.* Understanding sampling disturbance and behaviour of structured clays through constitutive modelling[J]. *Soils and Foundations*, 2013, 53(2):315.
- [7] TAIEBAT M, DAFALIAS Y F, PEEK R. A destructuration theory and its application to SANICLAY model [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2010, 34(10):1009.
- [8] SUEBSUK J, HORPIBULSUK S, LIU M D. Modified structured cam clay: a generalised critical state model for destructured, naturally structured and artificially structured clays[J]. *Computers and Geotechnics*, 2010, 37:956.
- [9] 祝恩阳, 姚仰平. 结构性土 UH 模型[J]. *岩土力学*, 2015(11):3101.  
ZHU Enyang, YAO Yangping. A UH constitutive model for structured soils [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015(11):3101.
- [10] CALLISTO L, GAJO A, WOOD D M. Simulation of triaxial and true triaxial tests on natural and reconstituted Pisa clay[J]. *Geotechnique*, 2002, 52(9):649.
- [11] LIU M D, CARTER J P, AIREY D W. Sydney soil model. I: theoretical formulation [J]. *International Journal of Geomechanics*, 2011, 11(3):211.
- [12] SLOAN S W, ABBO A J, SHENG D C. Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control [J]. *Engineering Computations*, 2001, 18(1/2):121.
- [13] CABOT M L, SLOAN S W, SHENG D C, *et al.* Error behaviour in explicit integration algorithms with automatic substepping[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, 108:1030.
- [14] GONZALEZ N A, GENS A. Evaluation of a constitutive model for unsaturated soils: stress variables and numerical implementation [C] // ALONSO E, GENS A. In *Fifth International Conference on Unsaturated Soils Barcelona*. Abingdon: Taylor & Francis Group, 2011: 829-836.
- [15] HAIRER E, NORSETT S P, WANNER G. Solving ordinary differential equations I [M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [16] ORTIZ M, POPOV E P. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985, 21(9):1561.
- [17] ORTIZ M, SIMO J C. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic relations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, 23(3):353.
- [18] DAFALIAS Y F, MANZARI M T, AKAISHI M. A simple anisotropic clay plasticity model [J]. *Mechanics Research Communications*, 2002, 29(4):241.