文章编号：0253-374X(2019)05-0720-03　　DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2019.05.018

保持量子态凸组合的 Tsallis 的映射

劳毅慧[1,2]，杨君齐[1]

(1. 同济大学 数学科学学院，上海 200092；2. 广西民族师范学院 数学与计算机科学学院，广西 崇左 532200)

摘要：设 H_m 是维数为 m 的复希尔伯特空间，$S(H_m \otimes H_n)$ 为复双体希尔伯特空间 $H_m \otimes H_n$ 上的量子态的全体，$S_{\text{sep}}(H_m \otimes H_n)$ 为其中可分量子态构成的凸集. 映射 $\varphi: S(H_m \otimes H_n) \to S(H_m \otimes H_n)$ 是满射，且 $\varphi(S_{\text{sep}}(H_m \otimes H_n)) = S_{\text{sep}}(H_m \otimes H_n)$. 若对于某个 $r \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$，满射 φ 保持量子态凸组合的 Tsallis 熵 $S^r(t\rho + (1-t)\sigma) = S^r(t\varphi(\rho) + (1-t)\varphi(\sigma))$ 对于任意的 ρ、$\sigma \in S(H_m \otimes H_n)$ 和任意的 $t \in [0,1]$ 成立；那么在 H_m、H_n 上分别存在酉算子 U_m、V_n，使得 $\varphi(\rho) = (U_m \otimes V_n)\rho(U_m \otimes V_n)^*$ 对于任意的 $\rho \in S_{\text{sep}}(H_m \otimes H_n)$ 成立.

关键词：映射；Tsallis 熵；量子态

中图分类号：O413.1　　**文献标志码**：A

Maps on Quantum States Preserving Tsallis Entropy of Convex Combinations

LAO Yihui[1,2]，*YANG Junqi* [1]

(1. School of Mathematical Sciences，Tongji University，Shanghai 200092，China；2. Mathematics and Computer Sciences，Guangxi Normal College for Nationalities，Chongzuo 532200，China)

Abstract：Let H_m be the complex Hilbert space with dimension m，$S(H_m \otimes H_n)$ be all the quantum states acting on complex bipartite Hilbert space $H_m \otimes H_n$ and $S_{\text{sep}}(H_m \otimes H_n)$ be the convex set of comparable quantum states.

$$\varphi: S(H_m \otimes H_n) \to S(H_m \otimes H_n)$$

be a surjective map and

$$\varphi(S_{\text{sep}}(H_m \otimes H_n) = S_{\text{sep}}(H_m \otimes H_n)).$$

For some $r \in R^+ \setminus \{1\}$，if φ satisfies Tsallis entropy

$$S^r(t\rho + (1-t)\sigma) = S^r(t\varphi(\rho) + (1-t)\varphi(\sigma))$$

for any $\rho, \sigma \in S(H_m \otimes H_n)$ and for any $t \in [0,1]$，there exist unitary operators U_m，V_n acting on H_m，H_n such that $\varphi(\rho) = (U_m \otimes V_n)\rho(U_m \otimes V_n)^*$ for any $\rho \in S_{\text{sep}}(\mathrm{H_m} \otimes \mathrm{H_n})$.

Key words：maps；Tsallis entropy；quantum states

收稿日期：2018-04-22
基金项目：国家自然科学基金(11871375)
第一作者：劳毅慧(1974—)，女，博士生，主要研究方向为算子代数与泛函分析. E-mail：yihuilao@yeah.net
通信作者：杨君齐(1988—)，男，博士生，主要研究方向为算子代数与泛函分析. E-mail：YJQ24@live.cn

1　问题的提出

量子态叫作密度矩阵，是作用在复希尔伯特空间上的半正定矩阵. 一个量子态 ρ 是纯态当且仅当 $\rho^2 = \rho$，即 ρ 是一个秩 1 投影. 若 $\rho^2 \neq \rho$，则量子态 ρ 是一个混合态. 复有限维希尔伯特空间 H_m 的所有量子态记为 $S(H_m)$，它是个凸集. 所有纯态记为 $\mathrm{Pur}(H_m)$，显然 $\mathrm{Pur}(H_m)$ 是 $S(H_m)$ 的子集. 在量子信息学中，人们经常在多体环境上研究问题，这时多体系统复希尔伯特空间 H 可用子系统 H_i(i 是个自然数)的张量积表示. 即

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_k$$

当 $k=2$ 时，系统就叫作双系统. 若 H_1、H_2 都是复有限维希尔伯特空间，那么对于 $\rho \in S(H_1 \otimes H_2)$，如果 $\rho = \sum_{i=1}^{n} p_i \rho_i \otimes \sigma_i$，其中 $\rho_i \in S(H_1)$、$\sigma_i \in S(H_2)$、$0 \leqslant p_i \leqslant 1$、$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. 则这时量子态 ρ 是可分的，否则就说量子态 ρ 是纠缠的. $S_{\text{sep}}(H_1 \otimes H_2)$ 和 $\mathrm{Pur}_{\text{sep}}(H_1 \otimes H_2)$ 分别表示双系统中所有可分量子态和可分量子纯态. 一个积态 $\omega \otimes \tau$ 是纯态当且仅当 ω 和 τ 都是纯态. 用符号 A^* 表示矩阵 A 的共轭转置.

量子纠缠是量子信息学的一个基本物理概念，判断复合系统中一个量子态是否可分很重要也费力，于是找一个作用于量子态之间的能够简化量子态的映射的结构是有意义的. 一直以来，多体系统中保持某一数值如冯诺依曼熵、数值域、p 范数、幂等、点谱等的线性映射的结构有很多成果值得学习. 2012 年，Fošner 等[1]对量子信息科学的线性保持问题做了一个概述，该文不仅刻画了保持谱不变的由埃米特矩阵张量积映射成埃米特矩阵张量积的线性变换的结构，还刻画了保持谱半径不变的矩阵张量

积之间的线性变换的结构. 很快，他们在文献[2]中也找到了保持 Ky Fan 范数和 Schatten 范数的矩阵张量积之间的线性变换的形式，并把结论推广到三体以上多系统环境. 文献[3]也研究了类似的定义和问题，接着侯晋川等[4]把文献[3]的结果推广到无限维的情形. 这些成果研究的算子之间的张量积的映射都是线性的. 文献[5-6]研究的是关于量子测量如冯诺依曼熵、Tsallis 熵单体系统上的非线性映射. 在文献[7-8]中刻画了一个作用在双体量子系统 $H_1\otimes H_2$上的所有可分态之间的并保持凸组合的双射的结构. 现在的目的是研究一个保持 Tsallis 熵凸组合的作用在量子态上的满射的结构. 其中 Tsallis 熵的定义与性质可以在文献[9-10]中找到. 对于 $\rho\in S(H)$、$r\in\mathbf{R}^+\backslash\{1\}$，Tsallis 熵的定义如下：

$$S^r(\rho)=\frac{Tr(\rho^r)-1}{1-r}$$

下面是主要结果.

2　定理的证明

定理 1　设 $S(H_m\otimes H_n)$为复双体希尔伯特空间 $H_m\otimes H_n$ 上的密度矩阵的全体，其中 H_m、H_n 是维数分别为 m、$n(m,n\geqslant 2)$的复希尔伯特空间. 记 $S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)$为其中可分量子态构成的凸集，映射

$$\varphi:S(H_m\otimes H_n)\rightarrow S(H_m\otimes H_n)$$

是满射，而且

$$\varphi(S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n))=S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)$$

若对于某个 $r\in R^+\backslash\{1\}$，满射 φ 保持量子态凸组合的 Tsallis 熵

$$S^r(t\rho+(1-t)\sigma)=S^r(t\varphi(\rho)+(1-t)\varphi(\sigma))$$

对于任意的 ρ、$\sigma\in S(H_m\otimes H_n)$和对于任意的 $t\in[0,1]$成立. 则 H_m、H_n 分别存在酉算子 U_m、V_n 使得 $\varphi(\rho)=(U_m\otimes V_n)\rho(U_m\otimes V_n)^*$ 对于任意的 $\rho\in S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)$成立.

证明定理 1 需要如下引理.

引理 1　(见文献[11]命题 3.8)设 H 是复有限维希尔伯特空间，映射 $\varphi:S(H)\rightarrow S(H)$是满射，若对于某个 $r\in\mathbf{R}^+\backslash\{1\}$，满射 φ 保持量子态凸组合的 Tsallis 熵

$$S^r(t\rho+(1-t)\sigma)=S^r(t\varphi(\rho)+(1-t)\varphi(\sigma))$$

对于任意的 ρ、$\sigma\in S(H)$和对于任意的 $t\in[0,1]$成立. 则 H 存在酉算子或者是共轭酉算子 W 使得 $\varphi(\rho)=W\rho W^*$ 对于任意的 $\rho\in S(H)$成立.

引理 2　(见文献[8]定理 3.5)设 $S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)$为复双体希尔伯特空间 $H_m\otimes H_n$ 上所有可分量子态的全体，其中 H_m、H_n 是维数分别为 m、$n(m,n\geqslant 2)$的复希尔伯特空间，映射

$$\varphi:S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)\rightarrow S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)$$

是双射. 则 φ 保持凸组合当且仅当下面之一成立：

(1) 存在可逆算子 $S\in B(H_m)$、$T\in B(H_n)$，使得

$$\varphi(\rho)=\frac{(S\otimes T)\psi(\rho)(S\otimes T)^*}{Tr((S\otimes T)\psi(\rho)(S\otimes T)^*)}$$

对于所有的 $\rho\in S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)$成立；

(2) 存在可逆算子 $S\in B(H_m,H_n)$、$T\in B(H_n,H_m)$，使得

$$\varphi(\rho)=\frac{(S\otimes T)\psi(\theta(\rho))(S\otimes T)^*}{Tr((S\otimes T)\psi(\theta(\rho))(S\otimes T)^*)}$$

对于所有的 $\rho\in S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)$成立.

其中 ψ 有如下几种可能：恒等算子、转置，有对第一个系统的转置和对第二系统的转置，其中转置和部分转置可相应于双体空间的任一组积态基来取. θ 为有界自伴算子 $B_{\text{sa}}(H_m\otimes H_n)$上的对换，即满足 $\theta(\omega\otimes\tau)=\tau\otimes\omega$ 的线性映射.

引理 3　设 $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$分别是 m、n 阶方阵且 $A\otimes B$ 为酉矩阵，则存在 $\lambda>0$，使得 λA 和$\frac{1}{\lambda}B$都是酉矩阵.

证明　由条件知

$$I_{mn}=(A\otimes B)(A\otimes B)^*=(AA^*)\otimes(BB^*)$$

设 $AA^*=(d_{ij})$，则 $I_{mn}=(d_{ij}BB^*)$. 从而必须所有的 $d_{ij}(i\neq j)$都为零，且所有的 $d_{ii}(i=1,2,\cdots,m)$都相等且非零，记其为 α，于是 $\alpha BB^*=I_n$、$AA^*=\alpha I_m$. 类似地，考虑

$$I_{mn}=(A\otimes B)^*(A\otimes B)=(A^*A)\otimes(B^*B)$$

可知存在某个非零数 β 使得 $\beta BB^*=I_n$、$AA^*=\beta I_m$，于是 $\alpha=\beta$. 特别地

$$\alpha=|a_{11}|^2+|a_{12}|^2+\cdots+|a_{1n}|^2>0$$

易验证$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$就是要找的λ.

定理 1 的证明　由引理 1 知，φ 必形如 $\varphi(\rho)=V\rho V^*$，其中 $\rho\in S(H_m\otimes H_n)$，$V$ 为 $H_m\otimes H_n$ 上的酉算子或共轭酉算子，从而 φ 是可逆的. 又知

$$\varphi(S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n))=S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)$$

因此当 φ 限制在可分态上时，它满足引理 2 的条件. 下面先考虑引理 2 的第一种情况. 综合引理 1 和引理 2 的结果，在 $H_m\otimes H_n$ 存在酉算子或共轭酉算子 V，使得对于任意的 $\rho\in S_{\text{sep}}(H_m\otimes H_n)$有

$$\varphi(\rho)=V\rho V^*=\frac{(S\otimes T)\psi(\rho)(S\otimes T)^*}{Tr((S\otimes T)\psi(\rho)(S\otimes T)^*)}$$

接着将

$$\rho=\left(\frac{1}{m}I_m\right)\otimes\left(\frac{1}{n}I_n\right)=\frac{1}{mn}I_{mn}$$

代入,显然恒等算子在任意基下的矩阵是单位矩阵,而单位矩阵的转置和部分转置也仍是单位矩阵,于是 $\varphi\left(\frac{1}{mn}I_{mn}\right)=\frac{1}{mn}I_{mn}$,从而

$$\frac{1}{mn}I_{mn}=\frac{(S\otimes T)(S\otimes T)^*}{Tr((S\otimes T)(S\otimes T)^*)}$$

记 $\frac{1}{mn}Tr((S\otimes T)(S\otimes T)^*)=k$,则 $k>0$(因为 S 和 T 都是可逆的). 记 $B=\frac{1}{\sqrt{k}}S\otimes T$,则 $BB^*=I$,因此 B 是酉矩阵. 由引理 3 知,存在 $\lambda>0$,使得 $\frac{\lambda}{\sqrt{k}}S$ 和 $\frac{1}{\lambda}T$ 同时为酉矩阵,分别记其为 U、V. 则

$$\varphi(\rho)=\frac{(\sqrt{k}B)\rho(\sqrt{k}B^*)}{Tr(\sqrt{k}B\rho\sqrt{k}B^*)}=\frac{B\rho B^*}{Tr(B\rho B^*)}=$$

$$B\rho B^*=(U\otimes V)\rho(U\otimes V)^*$$

对引理 2 中的第二种情况,由 S、T 可逆知 $m=n$. 用同样的方法把 $\rho=\frac{1}{mn}I_{mn}$ 代入并注意到 $\left(\frac{1}{m}I_m\right)\otimes\left(\frac{1}{n}I_n\right)=\left(\frac{1}{n}I_n\right)\otimes\left(\frac{1}{m}I_m\right)$, 则也有 $\psi\left(\theta\left(\frac{1}{mn}I_{mn}\right)\right)=\frac{1}{mn}I_{mn}$. 上面的结论仍成立.

参考文献:

[1] FOSNER A, HUANG Z J, LI C K, *et al*. Linear preserve and quantum information science [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2013,61(10):1377.

[2] FOSNER A, HUANG Z J, LI C K, *et al*. Linear maps preserving Ky fan norms and Schatten norms of tensor products of matrices [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2013,34(2):673.

[3] FRIEDLAND S, LI C K, POON Y T, *et al*. The automorphism group of separable states in quantum information theory[J]. Journal of Mathematical Physics, 2011,54(2):042203.

[4] HOU J C, QI X F. Linear maps preserving separability of pure states[J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 439 (5):1245.

[5] HE K, YUAN Q, HOU J C. Entropy-preserving maps on quantum states[J]. Linear Algebra and its Applications, 2015, 467(15):243.

[6] KARDER M, PETEK T. Maps on states preserving generalized entropy of convex combinations[J]. Linear Algebra and its Applications, 2017,532(1):86.

[7] HOU Jinchuan, LIU Liang. Quantum measurement and maps preserving convex combinations of separable states[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2012, 45 (20):205305.

[8] YANG Lihua, HOU Jinchuan. Quantum measurements and maps preserving strict convex combinations and pure states [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2013,46(19):195304.

[9] RAGGIO G A. Properties of q-entropies [J]. Journal of Mathematical Physics, 1995,36(9):4785.

[10] TSALLIS C. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics[J]. Journal of Statistical Physics, 1988, 52 (1/2):479.

[11] FANG Xiaochun, LAO Yihui. Preservers for the Tsallis entropy of convex combinations of density operator[J]. Advances in Mathematical Physics, 2018. DOI:10.1155/2018/5296085.