第 48 卷第 5 期
2020 年 5 月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 48 No. 5
May 2020

文章编号：0253-374X(2020)05-0751-05　　DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.19337

自伴算子代数上保持乘积的c-数值半径映射的刻画

张艳芳，方小春
(同济大学 数学科学学院，上海 200092)

摘要：令$B_s(H)$为复Hilbert空间H上自伴的有界线性算子全体组成的实Jordan代数。给出$B_s(H)$上保持算子乘积c-数值半径的满射的刻画。进而对一类特殊的$\boldsymbol{c}$，刻画了$B_s(H)$上保持算子乘积的c-数值域的满射。

关键词：c-数值半径；c-数值域；保持问题.
中图分类号：O177.1　　**文献标志码**：A

Self-adjoint Operator Algebras Preserving the c-Numerical Radius Mapping of Operator Products

ZHANG Yanfang, FANG Xiaochun
(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Let $B_s(H)$ be the real Jordan algebra of all self- adjoint operators on a complex Hilbert space H. We characterize the surjective maps preserving the c-numerical radius of products for operators in $B_s(H)$. Further, for a special kind of $\boldsymbol{c}$, the form of surjections preserving the c-numerical range of products for operators in $B_s(H)$ is obtained.

Key words: c-numerical radius; c-numerical range; preservers

1 引言

矩阵代数和算子空间上保持特定性质的映射的刻画问题，是算子理论和算子代数的一个重要研究方面。c-数值域和c-数值半径，作为矩阵和算子的一类重要概念，在量子计算和量子纠错码方面有广泛的应用，因此也被许多学者研究[1-3]。

令$\mathbf{R}$表示实数域且设$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_k)^{\mathrm{tr}}\in\mathbf{R}^k$，$H$是复Hilbert空间且$\dim(H)\geqslant k$，对于$H$上的任一有界线性算子$A$，

$$W_c(A)=\{\textstyle\sum_{i=1}^k c_i\langle A\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_i\rangle:\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k\text{是}H\text{的一组正交单位向量}\}$$

和

$$r_c(A)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in W_c(A)\}$$

分别称为A的c-数值域和c-数值半径。特别地，当$k=1$且$c_1=1$时，就得到A的数值域和数值半径。不难看到，将$\boldsymbol{c}$的分量按照降序排列后并不改变算子的c-数值域和c-数值半径，因此在本文中总假设$c_1\geqslant\cdots\geqslant c_k$。

令F代表c-数值域或c-数值半径，设Ω是一个集合，映射$\mathrm{T}:\Omega\to\Omega$满足：

$$F(\mathrm{T}(A)\circ\mathrm{T}(B))=F(A\circ B)\tag{1}$$

对任意的$A,B\in\Omega$都成立。文献[4]刻画了当Ω为n阶矩阵代数，$\circ$代表矩阵减法，F为c-数值半径时，映射T的形式。之后文献[5]中刻画了当Ω为复Hilbert空间上有界线性算子全体组成的代数，$\circ$代表算子乘法且F为c-数值域时，映射T的形式。

本文主要研究了自伴算子空间上保持算子乘积的c-数值半径的满射形式。即刻画了当Ω为复Hilbert空间上自伴的有界线性算子全体组成的实Jordan代数，$\circ$代表矩阵乘法且F为c-数值半径时，满足式(1)的满射T的形式。由于映射保持算子乘积的c-数值半径是该映射保持算子乘积的c-数值域的必要条件，进而对于一类特殊的$\boldsymbol{c}$，给出保持算子乘积c-数值域满射的刻画。本文的主要结构如下：第二部分给出自伴算子代数上保持算子乘积的c-数值半径的满射的刻画。第三部分中，对于一类特殊的$\boldsymbol{c}$研究了自伴算子代数上保持算子乘积的c-数值域的映射。

收稿日期：2019-08-19
基金项目：国家自然科学基金(13902340181)
第一作者：张艳芳(1987—)，女，博士生，主要研究方向为算子代数和算子理论。E-mail：1510533@tongji.edu.cn
通信作者：方小春(1966—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为算子代数与泛函分析。E-mail：xfang@tongji.edu.cn

下面介绍本文用到的主要符号:令C表示复数域,令H是复Hilbert空间,记H上有界线性算子全体组成的代数为$B(H)$,其中的自伴算子全体组成的子代数记为$B_s(H)$,并将单位算子记为I。对于任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}\in H$,$\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{f}$表示$H$上的一个秩一算子且对$\boldsymbol{z}\in H$,$(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{f})\boldsymbol{z}=\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{f}\rangle\boldsymbol{x}$。且每个秩一算子都可以表示成这样的形式。对于$H$的一组就范正交集$\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in\Gamma}$,任意的$\boldsymbol{x}\in H$都能表示为$\boldsymbol{x}=\sum_{i\in\Gamma}\xi_i\boldsymbol{e}_i$,其中$\xi_i\in$C。定义一个算子$J:H\to H$,其作用为$J\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}=\sum_{i\in\Gamma}\bar{\xi}_i\boldsymbol{e}_i$。算子$A$的共轭算子记为$\overline{A}$,其形式为$\overline{A}=JAJ$。易知$\langle\overline{A}\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle=\overline{\langle A\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle}$对于任意$i,j\in\Gamma$都成立。

2 保持算子乘积的c-数值半径的映射

定理1 设$\boldsymbol{c}\in\mathrm{R}^k$满足$c_i$'s不全相等,$H$为复Hilbert空间。若$\Phi:B_s(H)\to B_s(H)$是满射且当$\dim(H)=2$时,$\Phi(\mathrm{I})=\pm I$,那么

$$r_c(\Phi(A)\Phi(B))=r_c(AB),\quad A,B\in B_s(H)\tag{2}$$

成立当且仅当存在H上的酉算子U和泛函$f:B_s(H)\to\{-1,1\}$使得:

$$\Phi(A)=f(A)UAU^*$$

对所有的$A\in B_s(H)$都成立,或者

$$\Phi(A)=f(A)UJAJU^*$$

对所有的$A\in B_s(H)$都成立。

为了证明该定理,需要用到以下几个引理。

引理1 设$\boldsymbol{c}\in\mathrm{R}^k$满足$c_i$'s不全相等,若$T$是$B(H)$上的秩一算子,则:

(1) T的c-数值域是以$\tilde{c}_1\mathrm{tr}(T)$和$\tilde{c}_k\mathrm{tr}(T)$为焦点,$(\tilde{c}_1-\tilde{c}_k)\sqrt{\|T\|^2-|\mathrm{tr}(T)|^2}$为短轴长的椭圆盘或以$\tilde{c}_1\mathrm{tr}(T)$和$\tilde{c}_k\mathrm{tr}(T)$为端点的线段;

(2) T的c-数值半径是:

$$\frac{|\tilde{c}_1-\tilde{c}_k|}{2}\|T\|+\frac{|\tilde{c}_1+\tilde{c}_k|}{2}|\mathrm{tr}(T)|$$

其中:

$$\tilde{c}_1=\begin{cases}c_1, & 若\dim H=k\\ \max\{c_1,0\}, & 若\dim H>k\end{cases}$$

$$\tilde{c}_k=\begin{cases}c_k, & 若\dim H=k\\ \min\{c_k,0\}, & 若\dim H>k\end{cases}$$

证明:(1) 见文献[5]。

(2) 由第1节知$W_c(T)$是椭圆或者线段,若$W_c(T)$是椭圆,那么$r_c(T)$是$\frac{|\tilde{c}_1-\tilde{c}_k|}{2}\|T\|$与半长轴$a$之和,即得$r_c(T)=\frac{|\tilde{c}_1-\tilde{c}_k|}{2}\|T\|+\frac{|\tilde{c}_1+\tilde{c}_k|}{2}|\mathrm{tr}(T)|$。若$W_c(T)$是线段,则$\|T\|=|\mathrm{tr}(T)|$,从而有:

$$r_c(T)=\max\{|\tilde{c}_1\mathrm{tr}(T)|,|\tilde{c}_k\mathrm{tr}(T)|\}$$

引理1得证。

引理2 设$A,B\in B_s(H)$,则下列说法成立:

(1) 若$\|A\|=\|B\|$,则$A=\pm B$。

(2) 若$r_c(A\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})=r_c(B\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})$对所有的$\boldsymbol{x}\in H$都成立,则$A=\pm B$。

证明:(1) 见文献[6]。

(2) 对于$A,B\in B_s(H)$和任意$\boldsymbol{x}\in H$,有:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{|\tilde{c}_1-\tilde{c}_k|}{2}+\frac{|\tilde{c}_1+\tilde{c}_k|}{2}\right)\|A\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\\ \geqslant&\frac{|\tilde{c}_1-\tilde{c}_k|}{2}\langle A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle+\frac{|\tilde{c}_1+\tilde{c}_k|}{2}\|A\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\\ =&\frac{|\tilde{c}_1-\tilde{c}_k|}{2}\langle B\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle+\frac{|\tilde{c}_1+\tilde{c}_k|}{2}\|B\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\end{aligned}$$

由于B自伴,可得:

$$\|B\|=r_c(B)=\sup\{|\langle B\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle|:\|\boldsymbol{x}\|=1\}$$

所以$\|A\|\geqslant\|B\|$。同理可得$\|B\|\geqslant\|A\|$,得证。

引理3 设$A,B,D\in B_s(H)$,若$AB\in\mathrm{C}\backslash\{0\}$且$BD\in\mathrm{C}\backslash\{0\}$,则$A,B,D$均可逆且存在非零实数$t$,使得$A=tD$。

证明:对于$A,B\in B_s(H)$,$(AB)^*=BA$且AB与BA有相同的非零谱值。由$AB\in\mathrm{C}\backslash\{0\}$,可知$AB$与$BA$有相同的单点谱。因此$AB=BA$且都属于$\mathrm{R}\backslash\{0\}$。同理可得$BD\in\mathrm{R}\backslash\{0\}$。从而存在非零实数$t$使得$A=tD$。

下面引理是著名的Wigner定理,它是量子力学中起重要作用的基础性定理。关于它的进一步研究,请参考文献[7]。

引理4 令H是复Hilbert空间,$\Delta:H\to H$是一个双射,并且对任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in H$满足:

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|=|\langle\Delta(\boldsymbol{x}),\Delta(\boldsymbol{y})\rangle|$$

那么

$$\Delta(x)=\delta(x)Ux,\quad x\in H$$

其中$U:H\to H$是酉算子或共轭酉算子,泛函$\delta:H\to$C满足$|\delta(x)|\equiv1$。

引理5[8] 令$M_2{}^s$表示2阶Hermitian矩阵全体组成的集合。设满射$\Phi:M_2{}^s\to M_2{}^s$对于$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_2{}^s$

满足:

$$AB=0\Leftrightarrow\Phi(A)\Phi(B)=0 \tag{3}$$

那么Φ双边保持秩一矩阵,即$T\in M_2^s$是秩一矩阵当且仅当$\Phi(T)$是秩一矩阵。

接下来完成定理1的证明。

定理1证明 由c-数值半径的酉不变和共轭酉不变性以及$r_c(A)=r_c(\overline{A})$的事实易得充分性,故只给出必要性的证明。下分$\dim H\geqslant 3$和$\dim H=2$两种情形来证明。

情形1:$\dim H\geqslant 3$

当$\sum_{i=1}^{k}c_i\neq 0$时,已知$r_c(A)=0\Leftrightarrow A=0$,显然此时Φ满足式(3)。

当$\sum_{i=1}^{k}c_i=0$时,由c-数值半径的性质可知,算子A是单位算子的常数倍当且仅当$r_c(A)=0$,接下来证明此时式(3)仍然成立。易证$\Phi(A)=0\Leftrightarrow A=0$。若式(3)不成立,则存在非零的$A_0,B_0\in B_s(H)$满足:

$$A_0B_0=0且\Phi(A_0)\Phi(B_0)\in\mathbb{C}I\setminus\{0\}$$

由引理4,$\Phi(A_0)$,$\Phi(B_0)$都可逆。由于$\dim H$不小于3,从而A_0的零子空间$\ker(A_0)$和B_0的零子空间$\ker(B_0)$至少有一个维数不小于2,不妨设$\ker(A_0)$的维数大于等于2。取正交的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\ker(A_0)$,令$E=\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}$,易知$A_0E$的c-数值半径为0。如果$\Phi(A_0)\Phi(E)=0$,那么有$\Phi(E)=0$,进而$E=0$,不可能,说明$\Phi(A_0)\Phi(E)\in CI\setminus\{0\}$。令$D=\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{y}$,同理可得$\Phi(D)\Phi(A_0)\in\mathbb{C}I\setminus\{0\}$。由引理4知,存在非零实数$t$使得$\Phi(E)=t\Phi(D)$。由$ED=0$可知$\Phi(E)\Phi(D)\in CI$。从而$\Phi(E)$和$\Phi(D)$都属于$\mathbb{C}I\setminus\{0\}$,所以$r_c(\Phi(E)^2)=0$。但由引理1知$r_c(E^2)\neq 0$,矛盾。故对所有自伴算子$A,B$都有:

$$AB=0\Rightarrow\Phi(A)\Phi(B)=0$$

类似地可以说明$\Phi(A)\Phi(B)=0\Rightarrow AB=0$。因此得Φ符合式(3)。由文献[6]中的引理2.1知,存在H上的酉算子U和泛函$g:B_s(H)\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$使得:

$$\Phi(T)=g(T)UTU^* \tag{4}$$

对所有秩一$T\in B_s(H)$都成立,或者

$$\Phi(T)=g(T)UJTJU^* \tag{5}$$

对所有秩一$T\in B_s(H)$都成立。

由已知$r_c(\Phi(T)^2)=r_c(T^2)$,可得:

$$|g(T)|^2r_c(UTU^*)=r_c(T)$$

从而$g(T)\in\{-1,1\}$对所有秩一$T\in B_s(H)$都成立。

对于$A\in B_s(H)$,定义:

$$\Psi(A)=\begin{cases}U^*\Phi(A)U, & 若\Phi满足式(4)\\ JU^*\Phi(A)UJ, & 若\Phi满足式(5)\end{cases}$$

显然$\Psi(T)=g(T)T$对所有秩一$T\in B_s(H)$成立。故对于任意秩大于1的$A\in B_s(H)$和$\boldsymbol{x}\in H$都有:

$$r_c(A\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})=r_c(\Phi(A)\Phi(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}))=r_c(\Psi(A)\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})$$

由引理2知,$\Psi(A)=\pm A$。所以存在泛函$h:B_s(H)\to\{-1,1\}$使得$\Psi(A)=h(A)A$,$A\in B_s(H)$,显然对所有自伴秩一算子T都有$h(T)=g(T)$。

情形2:$\dim H=2$

此时$B(H)\cong M_2(\mathbb{C})$,此处$M_2(\mathbb{C})$是指二阶复矩阵全体组成的代数。首先说明$\Phi:M_2^s\to M_2^s$双边保秩一性。

若$c_1+c_2\neq 0$,则$r_c(\boldsymbol{A})=0$当且仅当$\boldsymbol{A}=0$,从而Φ满足式(3)。再由引理5,Φ双边保持秩一性。

若$c_1+c_2=0$,可证明$\boldsymbol{A}=0$当且仅当$\Phi(\boldsymbol{A})=0$。实际上若$\Phi(\boldsymbol{A})=0$,对任意$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^2$,$r_c(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})=0$,从而$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}I$,所以$\boldsymbol{A}=0$。

令$\boldsymbol{P_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P_2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$。设

$$\Phi(\boldsymbol{P_1})=\boldsymbol{Q_1}=\begin{pmatrix}a_1&a_{12}\\\overline{a}_{12}&a_2\end{pmatrix}$$

且$\boldsymbol{Q_1}$有特征值λ_1和λ_2,易知:

$$\lambda_1=\frac{a_1+a_2+\sqrt{(a_1-a_2)^2+4|a_{12}|^2}}{2} \tag{6}$$

以及

$$\lambda_2=\frac{a_1+a_2-\sqrt{(a_1-a_2)^2+4|a_{12}|^2}}{2} \tag{7}$$

由于

$$r_c(\boldsymbol{P_1})=c_1且r_c(\boldsymbol{Q_1})=c_1|\lambda_1-\lambda_2|$$

因此

$$|\lambda_1-\lambda_2|=1 \tag{8}$$

由$r_c(\boldsymbol{P_1}^2)=r_c(\boldsymbol{Q_1}^2)$得$c_1=c_1|\lambda_1^2-\lambda_2^2|$。所以

$$|\lambda_1+\lambda_2|=1 \tag{9}$$

式(8)和式(9)表明$\lambda_1\lambda_2=0$。这意味着$\boldsymbol{Q_1}$只有一个非零特征值1或−1,从而$\Phi(\boldsymbol{P_1})$是秩一的。设$\boldsymbol{Q_2}=\Phi(\boldsymbol{P_2})$,同理可以说明$\boldsymbol{Q_2}$也是秩一的,且它的非零特征值为1或−1。显然$\boldsymbol{Q_1}\boldsymbol{Q_2}=\boldsymbol{Q_2}\boldsymbol{Q_1}=0$,因此,存在$\mathbb{C}^2$上酉矩阵$\boldsymbol{U_0}$使得$\boldsymbol{U_0}^*\boldsymbol{Q_1}\boldsymbol{U_0}=\pm\boldsymbol{P_1}$和

$U_0{}^*Q_2U_0=\pm P_2$ 同时成立。令 $\Psi(A)=U_0{}^*\Phi(A)U_0$ 对所有 $A\in M_2{}^s$ 都成立,则只要 A 或 B 是秩一的,就有:

$$r_c(\Psi(A)\Psi(B))=r_c(AB)$$

对于秩一Hermitian矩阵 $\boldsymbol{T}$,若 $\boldsymbol{T}\in \mathrm{R}\boldsymbol{P}_1\cup\mathrm{R}\boldsymbol{P}_2$,则 $\Phi(\boldsymbol{T})$ 一定是秩一的,若 $\boldsymbol{T}\notin \mathrm{R}\boldsymbol{P}_1\cup\mathrm{R}\boldsymbol{P}_2$,设:

$$T=\begin{pmatrix} t_1 & t_{12}\\ \bar t_{12} & \dfrac{|t_{12}|^2}{t_1}\end{pmatrix},\ t_1t_{12}\neq 0$$

且设:

$$\Psi(T)=\begin{pmatrix} s_1 & s_{12}\\ \bar s_{12} & s_2\end{pmatrix}$$

其特征值 $\mu_1\geqslant\mu_2$,则 μ_1,μ_2 有式(7)和(8)的形式。由

$$r_c(\Psi(T)\Psi(I))=r_c(T)$$

可得:

$$2c_1(\mu_1-\mu_2)=2c_1(t_1+\frac{|t_{12}|^2}{t_1}),$$

即:

$$(s_1-s_2)^2+4|s_{12}|^2=(t_1+\frac{|t_{12}|^2}{t_1})^2 \tag{10}$$

又由 $r_c(\Psi(T)\Psi(P_1))=\begin{pmatrix} s_1 & 0\\ \bar s_{12} & 0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} -s_1 & 0\\ -\bar s_{12} & 0\end{pmatrix}$ 可得:

$$r_c(\Psi(T)\Psi(P_1))=2c_1\sqrt{s_1{}^2+|s_{12}|^2}$$

同理考虑 $r_c(TP_1)$,可得:

$$s_1{}^2+\left|s_{12}\right|^2=t_1{}^2+\left|t_{12}\right|^2 \tag{11}$$

由

$$r_c(\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}_2)=r_c(\Psi(\boldsymbol{T})\Psi(\boldsymbol{P}_2))$$

可得:

$$s_2{}^2+|s_{12}|^2=|t_{12}|^2+\frac{|t_{12}|^4}{t_1{}^2} \tag{12}$$

通过比较式(11)和(12),得到:

$$\frac{s_1{}^2+|s_{12}|^2}{s_2{}^2+|s_{12}|^2}=\frac{t_1{}^2}{|t_{12}|^2} \tag{13}$$

将式(13)代入式(11),得到:

$$t_1{}^2=\frac{(s_1{}^2+|s_{12}|^2)^2}{s_1{}^2+2|s_{12}|^2+s_2{}^2} \tag{14}$$

再将式(14)代入式(10),可得:

$$s_1s_2=|s_{12}|^2$$

所以 $\Psi(T)$ 是秩一的,从而 $\Phi(T)$ 也是秩一的。类似地,对任一 $T\in M_2{}^s$,若 $\Phi(T)$ 是秩一矩阵,也可证明 T 是秩一矩阵。

至此已经得到 Φ 双边保持秩一,即对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{C}^2$,存在 $\boldsymbol{u}_x\in\mathrm{C}^2$ 和泛函 g: $\mathrm{C}^2\rightarrow\mathrm{R}$ 使得:

$$\Phi(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_x\otimes\boldsymbol{u}_x$$

由 $r_c\left((\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})^2\right)=r_c\left(\Phi(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})^2\right)$ 可得:

$$g(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\in\{-1,1\}$$

对所有 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{C}^2$ 都成立。定义单射 V: $\mathrm{C}^2\rightarrow\mathrm{C}^2$,其作用为 $\mathrm{V}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}_x$。由于 Φ 是满射且双边保持秩一,因此 V 是满射。因为

$$r_c\Big((\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{y})\Big)$$
$$=r_c\Big(g(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{y})(\mathrm{V}\boldsymbol{x}\otimes\mathrm{V}\boldsymbol{x})(\mathrm{V}\boldsymbol{y}\otimes\mathrm{V}\boldsymbol{y})\Big)$$

从而有:

$$\left|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\right|\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|=\left|\langle\mathrm{V}\boldsymbol{x},\mathrm{V}\boldsymbol{y}\rangle\right|\|\mathrm{V}\boldsymbol{x}\|\cdot\|\mathrm{V}\boldsymbol{y}\|$$

即对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 都有 $\left|\langle\mathrm{V}\boldsymbol{x},\mathrm{V}\boldsymbol{y}\rangle\right|=\left|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\right|$。由引理4,存在 C^2 上的酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和泛函 ξ: $\mathrm{C}^2\rightarrow\{t\in\mathrm{C}:|t|=1\}$ 使得:$\mathrm{V}\boldsymbol{x}=\xi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$ 对所有的 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{C}^2$ 成立,或 $\mathrm{V}\boldsymbol{x}=\xi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}$ 对所有的 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{C}^2$ 成立。所以,对于 $M_2{}^s$ 上的秩一矩阵 $\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}$,下列之一成立:

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})&=g(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\overline{\xi(\boldsymbol{x})}\xi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\\&=g(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{15}$$

或

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})&=g(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\overline{\xi(\boldsymbol{x})}\xi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{U}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}\\&=g(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{U}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{16}$$

对任意的 $\boldsymbol{A}\in M_2{}^s$,定义:

$$\Upsilon(A)=\begin{cases}U^*\Phi(A)U, & \text{若}\Phi\text{满足式(15)}\\ JU^*\Phi(A)UJ, & \text{若}\Phi\text{满足式(16)}\end{cases}$$

显然,$\Upsilon(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}$ 对所有 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{C}^2$ 都成立。那么对于可逆的 $A\in M_2{}^s$ 和任意 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{C}^2$ 都有:

$$r_c(A)=r_c\big(\Upsilon(A)\Upsilon(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x})\big)$$

由引理3,存在泛函 h: $M_2{}^s\rightarrow\{-1,1\}$ 使得:

$$\Upsilon(A)=h(A)A$$

对所有 $A\in M_2{}^s$ 成立,其中,当 $\mathrm{rank}A=1$ 时,$h(A)=g(A)$。定理1得证。

3 保持乘积的c-数值域的映射

这部分给出自伴算子代数上一类保持算子乘积的c-数值域映射的刻画。

定理2 设 $\boldsymbol{c}\in\mathrm{R}^k$ 满足 $c_1+c_k\neq 0$,H 为复Hilbert空间。若 Φ:$B_s(H)\rightarrow B_s(H)$ 是满射且当 $\dim(H)=2$ 时,$\Phi(I)=\pm 1$,那么:

$$W_c(\Phi(A)\Phi(B))=W_c(AB) \tag{17}$$

对任意 $A,B\in B_s(H)$ 都成立,当且仅当存在 H 上酉

算子U使得:

$$\Phi(A)=\pm UAU^*$$

对所有的$A\in B_s(H)$都成立。

定理 2 的证明需要用到以下引理,它来自文献[5]的引理2.5。

引理 6 设 $T,S\in B(H)$ 都是秩一的且满足 $W_c(T)=W_c(S)$,那么:

(1) 当$c_1+c_k\neq 0$时,$\mathrm{tr}(S)=\mathrm{tr}(T)$;

(2) 当$c_1+c_k=0$时,$\mathrm{tr}(S)=\pm\mathrm{tr}(T)$。

最后完成定理 2 的证明。

定理 2证明:充分性显然,因此只给出必要性的证明。由于满射$\Phi:B_s(H)\to B_s(H)$符合式(2),那么Φ具有定理1的形式,即存在H上的酉算子U和泛函$f:B_s(H)\to\{-1,1\}$使得:

$$\Phi(A)=f(A)UAU^*$$

对所有的$A\in B_s(H)$都成立,或者

$$\Phi(A)=f(A)UJAJU^*$$

对所有的$A\in B_s(H)$都成立。

首先证明Φ是线性的。对$A_1,A_2,B\in B_s(H)$和秩一自伴的T, $W_c(\Phi(B)\Phi(T))=W_c(BT)$和引理2及引理6表明:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\Phi(A_1+A_1)\Phi(T))&=\mathrm{tr}(A_1T+A_1T)\\&=\mathrm{tr}(A_1T)+\mathrm{tr}(A_2T)\\&=\mathrm{tr}(\Phi(A_1)\Phi(T))+\mathrm{tr}(\Phi(A_2)\Phi(T))\end{aligned}$$

由于Φ是满射且保持秩一,因此$\Phi(T)$可以取遍所有自伴秩一$\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\in H)$,从而$\Phi$是可加的。同理可以证明$\Phi$是齐次的,即对任意$\alpha\in\mathrm{C}$,都有:

$$\Phi(\alpha B)=\alpha\Phi(B)$$

所以f必须是是常值泛函,即$f(A)\equiv\varepsilon$对所有的$A\in B_s(H)$成立,其中$\varepsilon=\pm1$。

若$\Phi(A)=\varepsilon UJAJU^*$对所有的$A\in B_s(H)$都成立,那么对任意$B\in B_s(H)$和秩一自伴$\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}$都有:

$$W_c(JBx\otimes xJ)=W_c(Bx\otimes x)$$

由引理2,可得$\langle JB\boldsymbol{x},J\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{x},B\boldsymbol{x}\rangle=\langle B\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle$对所有的$\boldsymbol{x}\in H$都成立,不可能。定理2得证。

参考文献:

[1] LI C K. The c-spectral , c-radial and c-convex matrices [J]. Linear and Multilinear Algebra, 1986, 15(1): 5.

[2] LI C K, TSING N K. Linear operators that preserve the c-numerical range or radius of matrices [J]. Linear and Multilinear Algebra, 1988, 23(1): 27.

[3] THOMAS S H, GUNTHER D, UWE H, *et. al*, The significance of the C-numerical range and the local C-numerical range in quantum control and quantum information [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2007, 56(1): 3.

[4] CHAN K. The c-numerical radius isometries on matrix algebras and triangular matrix algebras [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2015, 466(1): 160.

[5] ZHANG Y F, FANG X C. The c-numerical range of operator products on B(H)[J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2020, 14(1): 163.

[6] HE K, HOU J C, ZHANG X L. Maps preserving numerical radius or cross norms of products of self-adjoint operators [J]. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2010, 26(6): 1071.

[7] MOLNAR L. A generalization of Wigner's unitary anti-unitary theorem to Hilbert modules [J]. Journal of Mathematical Physics, 1999, 40(1): 5544.

[8] 钱祖欣,张秀玲.二阶自伴矩阵空间上保数值半径或交叉范数的映射[J].山西师范大学学报(自然科学版),2010,24(1): 1. DOI: 1009-4490(2010)01-0001-08.

QIAN Zuxin, ZHANG Xiulin, Maps preserving numerical radius or cross norms of products of self-adjoint matrices on 2 × 2 matrix space [J]. Journal of Shanxi Normal University (Natural Science Edition), 2010, 24(1): 1.DOI: 1009-4490 (2010)01-0001-08.